量子力学第２:第４回演習 (2002/6)

担当：星　健 夫（物理工学科）

1

1 次元調和振動子系の固有状態 $\phi_n(x) \quad (n = 0, 1, 2...)$ は、以下のような性質をもつ（教科書などを参照せよ）。これを既知として、以下の問いに答えよ。

$$
\begin{aligned}
&H_{\mathrm{1D}}\phi_n(x) = \varepsilon_n \phi_n(x) \\
&H_{\mathrm{1D}} \equiv \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \\
&\phi_n(x) = C_n \; u_n(\alpha x) \\
&\varepsilon_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \\
&\langle \phi_i \left| x \right| \phi_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\left\{\delta_{i,j+1}\sqrt{i} + \delta_{i+1,j}\sqrt{j}\right\}
\end{aligned}
$$

ここで、$\alpha \equiv \sqrt{m\omega/\hbar}$ は（１／長さ）の次元を持つ定数。C_n は規格化定数。関数 $u_n(\xi)$ は、Hermite 多項式 H_n を用いて $u_n(\xi) = H_n(\xi)e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ と書けるが、以下の計算では既知関数として用いて良い。

(1)$\langle \phi_i \left| x^2 \right| \phi_j \rangle$ を計算せよ。

(2) 外場 $V \equiv \lambda x^4$ がかかったとする。１次の摂動エネルギーを求めよ。

2

固有エネルギー E_1, E_2 をもつ２準位系 H を考え、この系に周波数 ω の外場 potential$V$ を加える。H, V を固有状態 $|1\rangle, |2\rangle$ を基底とする行列で書くと、

$$
H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}, \quad V(t) = \hbar\gamma \begin{pmatrix} 0 & e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix}
$$

とかける。時間に依存した Schrödinger 方程式

$$
i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = (H_0 + V)\,\psi
$$

を解いて、時間発展を考えたい。一般に系の状態 $\psi(t)$ は、

$$
\Psi(t) = c_1(t)|1\rangle + c_2(t)|2\rangle
$$

とかける。今、初期状態として $c_1(0) = 1, c_2(0) = 0$ だったとする。

(1) $\gamma = 0$ の時、$c_1(t), c_2(t)$ を求めよ。

(2) $\gamma > 0$ の時、1 次摂動の範囲で、$c_1(t), c_2(t)$ を求めよ。$|1\rangle$ から $|2\rangle$ への遷移確率 $W^{(1)}_{1\to 2}(t) \equiv |c_2(t)|^2$ を計算せよ。

(3)[自由課題]$\gamma > 0$ の時、厳密解を求め、(2) と比較せよ。

[答え：$|c_2(t)|^2 = (\gamma^2/(\gamma^2 + \delta\omega^2))\sin^2\Omega t$、ただし、$\delta\omega \equiv \omega - \omega_0$、$\Omega \equiv \sqrt{\gamma^2 + (\delta\omega/2)^2}$]