量子力学第 2 :第 2 回演習 (2002/4)

担当：星　健 夫（物理工学科）

1

Legendre 方程式

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+l(l+1)y=0, \quad [l:\text{実定数}] \tag{1}$$

に対し、以下の問いに答えよ。

(a) 方程式 (1) は 2 階線形斉次常微分方程式である。原点（正則点）での級数解を求めよ。また、収束半径が 1 であることを示せ。

(b) (a) は「級数が $|x|<1$ で収束する」ことを意味し、$x=\pm 1$ での正則性は、保証されない（実際、$x=-1,1,\infty$ は特異点になっている）。ところが「$l=$ 非負整数」の時は、$x=\pm 1$ でも正則な解が得られる。これをしめし、具体的に求めよ。

(ヒント：実はこのとき、級数は x^l で切れ、$-\infty<x<\infty$ で正則な解になっている)

(c) さらに $y(1)=1$ の条件を課すと、解は一意に決まる。これを「Legendre 多項式」といい、$P_l(x)$ と書く。$P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x), P_4(x)$ を具体的に書き下せ。

(d) l を固定し、Legendre 方程式の解を $y(x)$ とする。$w(x)\equiv(1-x^2)^{\frac{m}{2}}y^{(m)}(x)$ とおくと（ただし $m=1,2,3....l$）、$w(x)$ は、Legendre 陪方程式

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dw}{dx}\right]+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]w=0 \tag{2}$$

を満たすことを示せ。

(ヒント：たとえば、(1) を m 回微分し、$y^{(m)}, y^{(m+1)}, y^{(m+2)}$ を w で表わせばよい)

(e) これらから、

$$P_{lm}(x)\equiv(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)$$

は、(2) の解であることが分かる（Legendre 陪多項式）。$P_{lm}(\cos\theta)$ を、$(l,m)=(0,0),(1,0),(1,1)$ に対し、具体的に書き下せ。ただし、$0\leq\theta<\pi$ とする。

（注）ここでは正の m に対してだけ、Legendre 陪多項式を定義した。$m=-1,-2,-3...-l$ に対して定義することもあるが、その場合（定数倍だけ異なる）複数の定義式が存在する。注意せよ。本演習では、$m=-1,-2,-3...-l$ に対し、$P_{lm}(x)\equiv P_{l|m|}(x)$ を定義に採用する。

2

2 階の線形斉次常微分方程式

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

の一般解を求めたい。ただし、$xp(x), x^2q(x)$ は、原点で以下のように Taylor 展開可能とする。

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

(a) 解を

$$y = x^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (a_0 \equiv 1) \tag{1}$$

と仮定し与方程式に代入すると、

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda p_0 + q_0 = 0 \tag{2}$$

$$\{(\lambda + n)(\lambda + n - 1) + (\lambda + n)p_0 + q_0\}a_n + \sum_{l=1}^{n} \{(\lambda + n - l)p_l + q_l\}a_{n-l} = 0 \tag{3}$$

が得られることを示せ。これらはそれぞれ、「決定方程式」「漸化式」と呼ばれる。

(b) 一般の λ に対して、漸化式 (3) から得られる数列を $a_n = a_n(\lambda)$ と書くことにする。また、決定方程式 (2) の 2 解を実数と仮定し、$\lambda_1, \lambda_2 (\lambda_1 \geq \lambda_2)$ とおく。このとき $y_1(x)$

$$y_1(x) = Y(\lambda_1, x) \equiv x^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda_1) x^n \tag{4}$$

は、与方程式の解（の 1 つ）になっている。$y_1(x)$ と独立は解 $y_2(x)$ が、次のように書けることを示せ。

(i) $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$,(自然数) の時

$$y_2(x) = Y(\lambda_2, x) \equiv x^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda_2) x^n$$

(ii) $\lambda_1 = \lambda_2$ の時

$$y_2(x) = y_1(x) \log x + x^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a'_n(\lambda_1) x^n$$

(iii) $\lambda_1 - \lambda_2 = N$(自然数) の時（$A_n(\lambda) \equiv (\lambda - \lambda_2)a_n(\lambda)$ とおく）

$$y_2(x) = A_N(\lambda_2) y_1(x) \log x + x^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} A'_n(\lambda_1) x^n$$

[注] 上記解法は、Frobenius の方法と呼ばれる。例えば、以下の本などを参照。犬井・石津「複素函数論」（東大出版）第 8 章。

[注] 実際に方程式を解く際、上の表式を直接使う必要はない。決定方程式 (2) から λ_1, λ_2 を出した後は、適当な形を（天下り的に）仮定して計算しても良い。例えば (ii) の場合なら、

$$y_2(x) = y_1(x) \log x + x^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

を仮定し、余方程式に代入して $\{b_n\}$ を求める。