# 量子力学第 2 :第 1 回演習 (2002/4)

担当：星　健 夫（物理工学科）

以下、全ての変数・定数は、実数とする。

## 1

$a, b, c$ を定数とする以下の行列を考える。固有値・固有ベクトルを求めよ。ただし、固有ベクトルは、規格化直交系をとるように定めよ。

$$
\text{(i)} \begin{pmatrix} a & & & & & \\ & a & b & & & \\ & b & a & & & \\ & & & c & & \\ & & & & c & \\ & & & & & c \end{pmatrix}, \quad \text{(ii)} \begin{pmatrix} a & b & b & & & \\ b & a & b & & & \\ b & b & a & & & \\ & & & c & & \\ & & & & c & \\ & & & & & c \end{pmatrix}
$$

## 2

関数 $u_l(x) \quad (l = 0, 1, 2....)$ を、以下のように逐次的 (iterative) に決めることにする。(i) $u_0(x) \equiv$(定数)、(ii) $u_l(1) > 0$、(iii) $u_l(x)$ は $l$ 次の多項式で、次式で定義される関係（規格化直交関係）を満たす。

$$
\int_{-1}^{1} u_l(x) u_{l'}(x) dx = \delta_{ll'} \tag{1}
$$

(a)$l = 0, 1, 2, 3$ について $u_l(x)$ を求めよ。
(b) 関数 $\phi(x)$ が、以下のように $u_l(x)$ で展開できたとする。

$$
\phi(x) = \sum_l c_l u_l(x) \tag{2}
$$

このとき展開係数 $c_l$ は一意に決まる。$c_l$ を与える具体的な表式を求めよ。
(c) (b) で $\phi(x) \equiv x^2 + x + 1$ のとき、$c_l$ を求めよ。
[注] ここで求めた $u_l(x)$ は、「Legendre 多項式」と呼ばれる多項式を、定数倍したものである。

**3**

関数 $\phi(x)$ に対する、次の固有値方程式を考える。ここで、$\lambda$ は固有値である。

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{d\phi}{dx}\right\}=\lambda\phi \tag{1}$$

(a) $\lambda=0$ に対応する解を、求めよ。（ヒント：積分が直接実行できる）
(b) $\phi(x)$ を、適当な規格化直交関数系 $\{u_l(x)\}_l$ で展開する

$$\phi(x)=\sum_l c_l u_l(x). \tag{2}$$

ここで、$\{u_l(x)\}_l$ は既知であり、適当な $x_1, x_2$ を用いて、次式を満たすものとする。

$$\int_{x_1}^{x_2} u_l(x)u_{l'}(x)dx=\delta_{ll'} \tag{3}$$

解 $\phi(x)$ を求めるには、ベクトル $(......, c_1, c_2, ....)$ を求めれば良いが、これが行列の固有値問題に帰着されることを示せ。

(c) (2) の展開式において、前問の $u_0(x), u_1(x), u_2(x)$ だけを用いることにする（このとき、$x_1=-1, x_2=1$）。この範囲で、固有値方程式 (1) の解を求めよ。

(d) (a) で求めた解は、(c) で求めた解に含まれるか。理由も考えよ。