量子力学第２:第2回演習(2001/5)

担当：星　健 夫（物理工学科）

以下の問題の解答を、A4 レポート用紙 (枚数自由) にまとめ、教務室内の専用ポストに提出せよ。締切：5 月 28 日（月）午後５時（厳守）。

1

以下の方程式を「球 Bessel 方程式」と言う。（ただし $0 < x$ で考える。）

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right)+\frac{x^2-l(l+1)}{x^2}y=0, \quad l=0,1,2... \tag{1}$$

(a)$l=0$ に対する、一般解を求めよ。

(b) 一般解を $y=c_1y_1+c_2y_2$ と書くと、次式が成立することを示せ (Wronski 行列式)。

$$y_1'y_2-y_1y_2'=\frac{C}{x^2} \tag{2}$$

ただし、c_1, c_2, C は任意定数。

(c) $x \ll l(l+1)$ の時の一般解が、次式で与えられることを示せ。

$$y \approx c_1x^l+c_2\frac{1}{x^{l+1}} \tag{3}$$

(d) $x \gg l(l+1)$ の時の一般解が、次式で与えられることを示せ。

$$y \approx \frac{1}{x}\left(a_1\sin x+a_2\cos x\right) \tag{4}$$

ただし、a_1, a_2 は任意定数。

(e) 方程式 (1) に対する一次独立な（厳密）解を、球 Bessel 関数 ($j_l(x)$)・球 Neumann 関数 ($n_l(x)$) と言う。これらは、$x \ll l(l+1)$ で、

$$j_l(x) \approx \frac{x^l}{(2l+1)!!} \tag{5}$$

$$n_l(x) \approx \frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}} \tag{6}$$

となることを要求すれば、（係数も含めて）それぞれ一意に定まる。(b) と上記漸近形より、次式を示せ。

$$j_l'(x)n_l(x)-j_l(x)n_l'(x)=\frac{1}{x^2} \tag{7}$$

（注）式 (7) は、任意の x に対して成り立つ式であることに注意。

2

平面波 $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ に対し、進行方向（$\boldsymbol{k}$ 方向）を z 軸にとる。これは、Helmholtz 方程式（$(\Delta+k^2)\phi=0$）に対する、z 軸対称解（Y_{lm} で書くなら $m=0$ に相当する解）になっている。このことから、適当な係数 a_l を用いて、以下のように書き下せることが分かる。

$$e^{ikr\cos\theta}=\sum_{l=0}^{\infty}a_l j_l(kr)P_l(\cos\theta) \tag{1}$$

ここで、係数 a_l は、$a_l=(2l+1)i^l$ で与えられることが分かっている。（Legendre 関数の性質を使えば示せる。余裕があったら考えてみよ）。

(a) 次式を示せ。

$$j_l(x)=\frac{1}{2i^l}\int_{-1}^{1}P_l(t)e^{itx}dt \tag{2}$$

ただし、次式を使ってよい。

$$\int_{-1}^{1}P_{l'}(t)P_l(t)dt=\delta_{ll'}\frac{2}{2l+1} \tag{3}$$

(b) $x\to\infty$ で、次式となることを示せ。

$$j_l(x)\approx\frac{1}{x}\sin\left(x-\frac{l\pi}{2}\right) \tag{4}$$

（ヒント）：(2) を、次々と部分積分していく。

(c) (b) と、前問の結果より、$x\to\infty$ で、次式となることを示せ。

$$n_l(x)\approx-\frac{1}{x}\cos\left(x-\frac{l\pi}{2}\right) \tag{5}$$

3

3 次元極座標を (r,ϕ,θ) と書く。また、以下では $\hbar=1$ とする。$f(r),R(r)$ を $r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ のみによる関数とする。以下では、$\hat{l}_z\equiv-i\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)$ などを用いよ。

(a) 関数 $f(r)$ は、$\hat{l}^2$ の $l=0$ に対する固有関数であることを示せ。

(b) 関数 $xf(r),yf(r),zf(r)$ は $\hat{l}^2$ の $l=1$ に対する固有関数であることを示せ。またこれらの関数が互いに直交していることを示せ。

(c)(b) の 3 つの関数を重ね合わせて、$\hat{l}^2,\hat{l}_z$ に対する固有関数 $\Psi(\boldsymbol{r})\equiv R(r)Y_{lm}(\theta,\phi),l=1,m=-1,0,+1$ が作れることを示せ。

(d) 関数 $xyf(r),yzf(r),zxf(r),(x^2-y^2)f(r),(y^2-z^2)f(r),(z^2-x^2)f(r)$ は $\hat{l}^2$ の $l=2$ に対する固有関数であることを示せ。ただし、これら 6 つのうち一次独立になりうるのは 5 つである。これを示し、（関数 5 つからなる）一次独立な関数系を、実際に作れ。

(e)(d) の 5 つの関数を重ね合わせて、$\hat{l}^2,\hat{l}_z$ に対する固有関数 $\Psi(\boldsymbol{r})\equiv R(r)Y_{lm}(\theta,\phi),l=2,m=-2,-1,0,+1,+2$ が作れることを示せ。

4

半径 R の球対称井戸型ポテンシャルによる、s 波の散乱解を考える。波動関数は動径成分 $R(r)$ のみを持ち、$u(r) \equiv rR(r)$ を定義すると、次式で書ける。

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} - V_0 - E\right)u(r) = 0, \qquad r < R$$
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} - E\right)u(r) = 0, \qquad r > R$$

散乱解を考えているので、$E > 0$。V_0 は井戸の深さを表すが、負の値（つまり斥力ポテンシャル）も許すものとする。散乱波の波長を $k \equiv \sqrt{2mE/\hbar^2}$ とし、また、$\alpha \equiv 2mV_0/\hbar^2$ とする。

(a) 球 Bessel 方程式の $l = 0$ の場合などを用いて、上式を導出せよ。

(b) 以下では、$E > |V_0|$（または $k^2 > |\alpha|$) の場合を考える。この時、上記方程式を別々にとき、解が以下のように書けることを示せ。ただし、$K \equiv \sqrt{k^2 + \alpha}$ であり、A, B, δ は適当な定数。

$$u(r) = A \sin Kr, \quad r < R$$
$$u(r) = B \sin(kr + \delta), \quad r > R$$

さらに、$r = R$ での接続条件（$u(R), u'(R)$ が連続）を考えることにより、A, B を消去することが出来る。この結果、以下の式が導かれることを示せ。

$$\frac{1}{K}\tan(KR) = \frac{1}{k}\tan(kR + \delta)$$

これは δ を求める式である。この δ を「位相のずれ (phase shift)」と呼ぶ。

(c) δ が微少なときを考える。このとき、δ を求める式を、できるだけ簡単な形にせよ。

(d) V_0 の符号が変わるとき（つまり引力ポテンシャルから斥力ポテンシャルに変わるとき)、δ はどうなるか。これはもっともなことか。

(e) この問題で扱った原理を用いて、実験を組み立てられないか。

(f) [自由課題] JAVA などを使って、$u(r)$ の振る舞いをグラフにせよ。