量子力学第２:第１回演習 (2001/4)

担当：星　健 夫（物理工学科）

以下の問題の解答を、A4 レポート用紙 (枚数自由) にまとめ、教務室内の専用ポストに提出せよ。締切：５月７日（月）午後５時（厳守)。

1

Hermite 方程式

$$y'' - 2xy' + 2\nu y = 0, \quad [\nu : \text{定数}]$$

の一般解を求めたい。

(a) 原点は正則点であるので、以下の級数解を仮定して、解が求まる。実際に求めよ。また得られた級数の収束半径を求めよ。

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

(b) (a) では、全ての ν に対して、解が得られた。ここで境界条件

$$\lim_{x \to \pm\infty} y(x) e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0$$

を課すと、ν にいかなる制限がつくか。又その時、解はどう書けるか。（注）得られた関数 $\phi(x) \equiv y(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}$ は、（規格化定数を除いて）一次元調和振動子の固有関数になっている。

(c) [自由課題] コンピュータを用いて、様々な ν に対する $\phi(x)$ の振る舞いを、調べてみよ。Java などを用いて、グラフ表示プログラムを作るとさらに良い。

2

微分方程式

$$x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0$$

の一般解を求めたい。

(a) 原点は確定特異点であるので、以下の級数解を仮定して、すくなくとも一つの解が求まる。

$$y = x^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (a_0 \equiv 1)$$

実際に代入して、λ を決める方程式を導出せよ。これは重解になっている（この解を $\lambda = \lambda_1$ とする)。

(b) 級数として、一つの解 ($y_1(x)$ とする）が求まる。これを求めよ。また、得られた級数解の収束半径を求めよ。

(c) もう一つの独立解 ($y_2(x)$ とする）を、以下の形を仮定して求めよ。

$$y_2(x) = y_1(x) \log x + x^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

3

Legendre 方程式

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+l(l+1)y=0, \quad [l:\text{実定数}] \tag{1}$$

に対し、以下の問いに答えよ。

(a) 方程式 (1) は 2 階線形斉次常微分方程式である。原点（正則点）での級数解を求めよ。また、収束半径が 1 であることを示せ。

(b) (a) は「級数が $|x|<1$ で収束する」ことを意味し、$x=\pm 1$ での正則性は、保証されない（実際、$x=-1,1,\infty$ は特異点になっている）。ところが「$l=$ 非負整数」の時は、$x=\pm 1$ でも正則な解が得られる。これをしめし、具体的に求めよ。

(ヒント：実はこのとき、級数は x^l で切れ、$-\infty<x<\infty$ で正則な解になっている）

(c) さらに $y(1)=1$ の条件を課すと、解は一意に決まる。これを「Legendre 多項式」といい、$P_l(x)$ と書く。$P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x), P_4(x)$ を具体的に書き下せ。

(d) l を自然数に固定し、Legendre 方程式の解を $y(x)$ とする。$w(x)\equiv(1-x^2)^{\frac{m}{2}}y^{(m)}(x)$ とおくと [ただし m は自然数]、$w(x)$ は、Legendre 陪方程式

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dw}{dx}\right]+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]w=0 \tag{2}$$

を満たすことを示せ。

(ヒント：たとえば、(1) を m 回微分し、$y^{(m)}, y^{(m+1)}, y^{(m+2)}$ を w で表わせばよい)

(e) 方程式 (2) の解 $w(x)$ に対し、「$w(x)\equiv 0$ ではなく、$-1\leq x\leq 1$ で正則である」ことを要求する。このとき (l,m) に対し、「$l=$ 非負整数、$m=0,1,2,3...l$」の制限がつくことを示せ。

(f) (e) のとき、解 $w(x)$ は、

$$w(x)=P_{lm}(x)\equiv(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)$$

と書ける。$P_{lm}(\cos\theta)$ を、$(l,m)=(0,0),(1,0),(1,1)$ に対し、具体的に書き下せ。ただし、$0\leq\theta<\pi$ とする。

4

原子単位 (atomic unit, a.u.) とは、電子の質量、Plank 定数、電子の電荷量（の絶対値）を、１とおくものである ($m_e=\hbar=e=1$)。長さ・エネルギー・時間において、それぞれ、1 a.u. はいくらになるか。SI 単位系に換算せよ。また、どのような物理的意味をもっているか。光速は原子単位でいくらになるか。

シリコン結晶における平均原子間距離を a.u. に換算せよ。エネルギー 1 a.u. を、電子ボルト (eV) に換算せよ。以下のエネルギー量と、電子ボルト (eV) との 関係を調べよ：可視光のエネルギー（波長 400-800nm)、キロジュール／モル (kJ/mol)、絶対温度 (K)。