量子力学第２:第4回演習(00/6)

担当：星　健 夫（物理工学科）

15

固有エネルギー $\epsilon_1, \epsilon_2 (\epsilon_1 \leq \epsilon_2)$ をもつ２準位系 H_0 を考え、その固有状態を $|1>, |2>$ とする。この系に摂動 H' を加える。H, H' を $|1>, |2>$ を基底とする行列で書くと、

$$H_0 = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix}, \quad H' = \begin{pmatrix} V_1 & \gamma \\ \gamma * & V_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} V_1' & \gamma' \\ \gamma' * & V_2' \end{pmatrix}$$

ここで $\lambda (\neq 0)$ は摂動パラメータであり、$\gamma \neq 0$ とする。

(1)$H \equiv H_0 + H'$ に対し、厳密な固有値・固有状態を求めよ。

(2)$\epsilon_1 < \epsilon_2, V_1 \neq V_2$ のとき、(1) で得られた固有値を、λ の最低次の項で近似せよ。この結果を、摂動論での結果と比較せよ。

(3)$\epsilon_1 < \epsilon_2, V_1 = V_2 (\equiv V_0)$ のとき、(1) で得られた固有値を、λ の最低次の項で近似せよ。この結果を、摂動論での結果と比較せよ。

16

1 次元調和振動子系の固有状態 $\phi_n(x) \quad (n = 0, 1, 2...)$ は、以下のような性質をもつ（教科書などを参照せよ）。これを既知として、以下の問いに答えよ。

$$\begin{aligned}
&H_{1\mathrm{D}} \phi_n(x) = \varepsilon_n \phi_n(x) \\
&H_{1\mathrm{D}} \equiv \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \\
&\phi_n(x) = C_n \ u_n(\alpha x) \\
&\varepsilon_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \\
&\langle \phi_i \left| x \right| \phi_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha} \left\{ \delta_{i,j+1} \sqrt{i} + \delta_{i+1,j} \sqrt{j} \right\}
\end{aligned}$$

ここで、$\alpha \equiv \sqrt{m\omega/\hbar}$ は（１／長さ）の次元を持つ定数。C_n は規格化定数。関数 $u_n(\xi)$ は、Hermite 多項式 H_n を用いて $u_n(\xi) = H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ と書けるが、以下では既知関数として用いて良い。

(1) 各固有状態に対するポテンシャルエネルギーを求めよ。

(2) 外場 $V \equiv \lambda x$ がかかったとする。厳密な固有関数と固有エネルギーを求めよ。摂動ではどうなるか。

(3) 外場 $V \equiv \lambda x^2$ がかかったとする。厳密な固有関数と固有エネルギーを求めよ。摂動ではどうなるか。

17

2 次元等方的調和振動子系を考える。以下では、必要ならば前問の結果を用いて良い。

$$H_{\mathrm{2D}} \equiv \frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+\frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2)$$

(1) エネルギーの低い方から 3 番目までの固有エネルギーはいくらか。縮退はあるか。
(2) 次に摂動

$$H' \equiv \lambda m\omega^2 xy \quad (\lambda << 1)$$

をかける。エネルギーの低い方から 2 番目までのそれぞれの状態に対して、1 次摂動の範囲でエネルギーを求めよ（余裕があれば、3 番目の状態も同様に考えよ）。
(3)Hamiltonian が $H_0 + H'$ の問題を厳密に解け。これを (2) の結果と比較せよ。

18

3 次元等方的調和振動子系を考える。以下では、必要ならば前々問の結果を用いて良い。

$$H_{\mathrm{3D}} \equiv \frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+\frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2+z^2)$$

外場 $V \equiv \lambda z$ がかかったとする。厳密な固有関数と固有エネルギーを求めよ。摂動ではどうなるか。