量子力学第 2 :第2回演習 (00/5)

担当：星　健 夫（物理工学科）

7

Legendre 多項式 $P_l(x)$ を次式で定義する。[Rodrigues の公式]

$$P_l(x) \equiv \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l$$

ここで、l は 0 又は自然数とし、$-1 \le x \le 1$ を定義域とする。また以下では、 必要なら次式を用いてよい。ただし m, n は自然数。[Beta 積分]

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

(a) 低次の l に対し $P_l(x)$ を書き下し、（可能ならコンピュータを使って）グラフに描け。
(b) 次の関係式を示せ。[直交性]

$$\int_{-1}^1 P_l(x)P_{l'}(x)dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}$$

(c) 次の式を満足することを示せ。[Legendre 方程式]

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dP_l(x)}{dx}\right\} + l(l+1)P_l(x) = 0$$

ヒント：$w(x) \equiv (x^2-1)^l$ に対し、$(x^2-1)w''(x) - 2(l-1)xw'(x) - 2lw(x) = 0$、を示し、これを l 回微分する。

8

Rodrigues の公式で与えられる $P_l(x)$ より、次の関数 $P_{lm}(x)$ を作ることを考える。ただし、$m = 0, 1, 2, 3..., l$。[Legendre 陪多項式]

$$P_{lm}(x) \equiv (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)$$

(a) 低次の (l, m) に対して、$P_{lm}(x)$ を書き下せ。
(b) 次の式を満足することを示せ。[Legendre 陪方程式]

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dP_{lm}(x)}{dx}\right\} + \left\{l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right\}P_{lm}(x) = 0$$

(注) 量子力学では $m = -1, -2, ... -l$ に対する $P_{lm}(x)$ も登場するが、この定義は何通りか存在する。違いは定数倍だけで本質的ではないが、教科書等を読む際には注意せよ。この演習では、$P_{lm}(x) \equiv P_{l|m|}(x)$ と定義しておくことにする。

9

l を任意の実数として、次の Legendre 方程式を考える。

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right\}+l(l+1)y=0$$

(a) $-1\leq x\leq 1$ で正則な解を、原点における Taylor 級数展開を用いて求めよ。とくに、l は非負整数に限る、という制限がつくことを示せ。

参考：一般に、$x=x_0$ における Taylor 級数と、その収束半径 R は、それぞれ次のように与えられる。(収束半径については、右辺の極限値が存在するときのみ)。

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,\quad R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

(b) 低次の l について、(a) で求めた解を書き下せ。(これらは規格化定数を除いて、上で求めた Legendre 多項式になっている。)

(c)Legendre 方程式を、線形常微分方程式として考えることにする。$l=0$ の時は一般解が簡単に求まるので、実際に求めてみよ。

参考：一般解は任意定数 c_1,c_2 を伴い、$y(x)=c_1P_0(x)+c_2Q_0(x)$、の形に書ける。一つの独立解 $P_0(x)$ は、上で求めた（第１種）Legendre 関数である。もう一方の独立解 $Q_0(x)$ は、第２種 Legendre 関数と呼ばれる。$Q_0(x)$ が (a) では出てこなかったのは、$x=1$ で正則ではないためである。

参考：$l\neq 0$ の第２種 Legendre 関数については、例えば以下の本を参照。ただし、量子力学の勉強に役立つことは、ないだろう。

寺沢「自然科学者のための数学概論」岩波書店

10

球対称ポテンシャル $V(r)$ 中の Schorödinger 方程式を考える。

(a) 極座標において変数分離をして、$\psi\equiv R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ と書く。$\Phi(\phi)$ に対する方程式を解くと、$\Phi(\phi)=\frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}}\quad[m:\text{整数}]$ となることを示せ。その際、波動関数のどのような性質を用いたか、明記せよ。

(b) Θ に関する方程式が、Legendre 陪方程式に帰着することを示せ。

ヒント：θ の代わりに、$t\equiv\cos\theta$ を独立変数に選ぶ。

11

Legendre 多項式 $P_l(x)\quad(l=0,1,2....)$ を、以下のように逐次的 (iterative) に決めることにする。(a) $P_0(x)\equiv 1$、(b) 全ての l に対し $P_l(1)=1$、(c) $P_l(x)$ は l 次の多項式で、より低次の Legendre 多項式と直交する

$$\int_{-1}^{1}P_l(x)P_n(x)dx=0,\quad n=0,1,2....,l-1$$

これを実際に実行し、低次の l について $P_l(x)$ を求めよ。それが、前問で与えた Legendre 多項式になることを確かめよ。