量子力学第２:第１回演習 (00/4)

担当：星　健 夫（物理工学科）

1

3 次元極座標を (r,ϕ,θ) と書く。また、以下では $\hbar=1$ とする。$f(r),R(r)$ を $r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ のみによる関数とする。以下では、$\hat{l}_z\equiv -i\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)$ などを用いよ。

(a) 関数 $f(r)$ は、$\hat{l}^2$ の $l=0$ に対する固有関数であることを示せ。

(b) 関数 $xf(r),yf(r),zf(r)$ は $\hat{l}^2$ の $l=1$ に対する固有関数であることを示せ。またこれらの関数が互いに直交していることを示せ。

(c)(b) の 3 つの関数を重ね合わせて、$\hat{l}^2,\hat{l}_z$ に対する固有関数 $\Psi(\boldsymbol{r})\equiv R(r)Y_{lm}(\theta,\phi),l=1,m=-1,0,+1$ が作れることを示せ。

(d) 関数 $xyf(r),yzf(r),zxf(r),(x^2-y^2)f(r),(y^2-z^2)f(r),(z^2-x^2)f(r)$ は $\hat{l}^2$ の $l=2$ に対する固有関数であることを示せ。ただし、これら 6 つのうち一次独立になりうるのは 5 つである。これを示し、（関数 5 つからなる）一次独立な関数系を、実際に作れ。

(e)(d) の 5 つの関数を重ね合わせて、$\hat{l}^2,\hat{l}_z$ に対する固有関数 $\Psi(\boldsymbol{r})\equiv R(r)Y_{lm}(\theta,\phi),l=2,m=-2,-1,0,+1,+2$ が作れることを示せ。

2

前問の記法を用いる。また $l=0,1,2...$ であり、$m=-l,-l+1......,l-1,l$ である。

(a) 次式を示せ。

$$x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}=r\frac{\partial}{\partial r}$$

(b) $\hat{l}^2\equiv\hat{l}_x^2+\hat{l}_y^2+\hat{l}_z^2$ に

$$\hat{l}_z\equiv -i\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

などを代入して計算することより、次式を示せ。

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\hat{l}^2}{r^2}$$

(c)$\hat{l}^2Y_{lm}=l(l+1)Y_{lm}$ とあわせて、

$$\Delta\left(RY_{lm}\right)=\left[\frac{1}{r}\left(rR\right)''-\frac{l(l+1)}{r^2}R\right]Y_{lm}$$

を示せ。とくに、$R(r)=r^l$ の時はどうなるか。

3

角運動量演算子 $\boldsymbol{j}\equiv(j_x,j_y,j_z)$ を次の交換関係で定義する。

$$[j_x,j_y]=i\hbar j_z,\quad [j_y,j_z]=i\hbar j_x,\quad [j_z,j_x]=i\hbar j_y$$

また、$\boldsymbol{j}^2\equiv j_x^2+j_y^2+j_z^2$ と定義する。

(a) $[\boldsymbol{j}^2, j_z] = 0$ を示せ。

これにより、$\boldsymbol{j}^2, j_z$ の同時固有状態、つまり、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{j}^2|\alpha\beta> &= \hbar^2\alpha|\alpha\beta> \\ j_z|\alpha\beta> &= \hbar\ \beta|\alpha\beta> \end{aligned}$$

を満足する $|\alpha\beta>$ が存在することが分かる。ここで α, β は、それぞれ $\boldsymbol{j}^2, j_z$ に対する（無次元化された）固有値。ただしこれら固有値は、任意の実数を取ることはできない。以下では、α, β の取りうる値を決定する。

(b) $\alpha - \beta^2 \geq 0$ である。なぜか。

(c) 演算子 j_+, j_- を、$j_\pm \equiv j_x \pm i j_y$ で定義する。$[j_z, j_\pm]$ を求めよ。これから、$j_\pm|\alpha\beta>$ も、j_z の固有関数であることをしめし、固有値を求めよ。

(d) α, β の取り得る値を求めよ。

(e) この問題では、z 軸を「特別扱い」しているように見える。この取り扱いは正しいか。

4

1 粒子の Newton 方程式 $m_e\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$ を考える。ここで、m_e:質量,$\boldsymbol{r}$:座標, $\boldsymbol{v} \equiv \dot{\boldsymbol{r}}$:速度, $\boldsymbol{p} \equiv m_e\boldsymbol{v}$:運動量、である。以下では、角運動量を $\boldsymbol{L} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ と書く。

(a) $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{L} = 0, \dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ を示せ。また、$\boldsymbol{F}$ がポテンシャル力のとき（$\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}V$）、全エネルギー E が

$$E \equiv \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m_e} + V(\boldsymbol{r}) = \frac{p_r^2}{2m_e} + V(\boldsymbol{r}) + \frac{L^2}{2m_e r^2}$$

と書けることを示せ。ただし、$r \equiv |\boldsymbol{r}|, \quad p_r \equiv m_e\dot{r}$。

(b) 球対称ポテンシャル $V(r)$ 中の古典粒子の運動を考える。このとき運動が 2 次元平面に限られ、角運動量の各成分 L_x, L_y, L_z が保存することを示せ。

(c) 量子論に話を移し、球対称ポテンシャル中の Schrödinger 方程式を考える。保存量について、古典論とはどのように違うか。($\hbar \to 0$ とするとどうなるか、考えよ。)

(d) 上のエネルギー E の表式で、

$$p_r \to \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dr}, \quad L^2 \to \hbar^2 l(l+1)$$

と機械的に演算子に置き換える。演算子に置き換わったエネルギー E を、H と書く。この演算子 H を $u(r) \equiv rR(r)$ に作用させると、動径方向の（1 次元的な）Schrödinger 方程式に『対応』していることを示せ（問題 2 の記法と結果を用いる）。なぜ、$R(r)$ に対する方程式ではなく、$u(r)$ に対する方程式になっているのだろう。考えてみよ。

5

2 次元球（円筒）座標を (r, θ) と書く $(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$。2 次元空間で、球（円筒）対称ポテンシャル $V(r)$ 中の Schrödinger 方程式を論ぜよ。ただし、

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

6

原子単位 (atomic unit, a.u.) は、電子の質量、Plank 定数、電子の電荷量（の絶対値）を、1 とおくものである ($m_e = \hbar = e = 1$)。長さ・エネルギー・時間において、それぞれ、1 a.u. はいくらになるか。馴染みのある単位系に換算せよ。また、それぞれはどのような物理的意味をもっているか。調べてみよ。さらに、光速は原子単位ではいくらになるか。