

量子力学 2001 年試験 2001 年 7 月 17 日

問題 1. 主量子数  $n = 2$  にある水素原子に摂動

$$H' = A \left[ \left( \frac{x}{r} \right)^2 + \left( \frac{y}{r} \right)^2 \right] + B \left( \frac{z}{r} \right)^2$$

がかかっている ( $A, B$  は定数)。摂動の 1 次の範囲でエネルギーおよび波動関数を求めよ。ただし水素の規格化された波動関数は  $\psi_{nlm}(\mathbf{r}) = f_{nl}(r)Y_{lm}$  であるとせよ。また  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  は以下で与えられる。

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{x + iy}{r} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi},$$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{z}{r} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad Y_{1-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{x - iy}{r} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi}$$

問題 2.

[2-1.]  $(\theta, \phi)$  方向を向いている磁場がかかっている。このときスピンの関するハミルトニアンは

$$H = \frac{e}{m} \mathbf{s} \cdot \mathbf{B}$$

である。スピン ( $s = \frac{1}{2}$ ) の準位を対角にすることによりこのスピン状態を  $s_z$  の固有関数  $\alpha, \beta$  を用いてあらわせ。ただし、 $s_z$  を対角にする基底 ( $m_s = \pm \frac{1}{2}$ ) では、スピン行列は以下で与えられる。

$$s_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad s_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

[2-2.]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ix)^n}{n!} \begin{pmatrix} A & B - iC \\ B + iC & -A \end{pmatrix}^n$$

を計算せよ。

[2-3.]  $t < 0$  で  $s_z$  の  $m_s = 1/2$  の固有状態にあった電子に、 $t = 0$  以後  $(\theta, \phi)$  方向を向いている一定磁場をかけたら電子スピンはどのような運動を行うか。 $s_z$  の期待値の時間依存性を計算して議論せよ。

[参考] 時刻  $t = 0$  で波動関数が  $\psi_0 = \psi(t = 0)$  である状態のそれ以降の時間変化は  $\psi(t) = \exp(-iHt/\hbar)\psi_0$  となる。また

$$\begin{pmatrix} A & B - iC \\ B + iC & -A \end{pmatrix}^2 = (A^2 + B^2 + C^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$