

—量子力学第2 プリント

相対論的電子論

ディラック方程式

相対論の式

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$$

から

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, p_x \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

を要請する事により微分方程式を作り、それが時間に関して1階の微分方程式であるようにする。

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi, H = c\vec{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2; \vec{\alpha}, \beta = \text{一般には行列}$$

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - c\vec{\alpha} \cdot \mathbf{p} - \beta mc^2)\psi = 0$$

左から共役な演算子を作用させて

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + c\vec{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2)(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - c\vec{\alpha} \cdot \mathbf{p} - \beta mc^2)\psi = 0$$

これと最初の式 $E^2 - p^2 c^2 - m^2 c^4 = 0$ を比べて、次の $\vec{\alpha}, \beta$ の条件が求められる。

$$\begin{cases} \alpha_k \alpha_\ell + \alpha_\ell \alpha_k = 2\delta_{k\ell} \\ \alpha_k \beta + \beta \alpha_k = 0 \\ \beta^2 = 1 \end{cases}$$

これらを満たすのは、 $\vec{\alpha}, \beta$ が 4×4 の行列、 ψ が4次元のベクトルである時。(以下で $\vec{\sigma}$ は Pauli 行列)

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Dirac equation} : (i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - c\vec{\alpha} \cdot \mathbf{p} - \beta mc^2)\psi = 0, \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

$$\text{確率} : P = \psi^\dagger \psi = \sum_i |\psi_i|^2$$

$$\text{流れの密度} : \mathbf{j} = \psi^\dagger \vec{\alpha} \psi$$

自由電子

$$\psi_j = u_j e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t}$$

$$E_{\pm} = \pm\sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}$$

$$E = E_+ > 0 : \quad u_+^{(1)} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ cp_z/(E_+ + mc^2) \\ c(p_x + ip_y)/(E_+ + mc^2) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v/c \\ v/c \end{pmatrix}$$

$$u_+^{(2)} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c(p_x - ip_y)/(E_+ + mc^2) \\ -cp_z/(E_+ + mc^2) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ v/c \\ v/c \end{pmatrix}$$

$$E = E_- < 0 : \quad u_-^{(1)} \sim \begin{pmatrix} -cp_z/(-E_- + mc^2) \\ -c(p_x + ip_y)/(-E_- + mc^2) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_-^{(2)} \sim \begin{pmatrix} -c(p_x - ip_y)/(-E_- + mc^2) \\ cp_z/(-E_- + mc^2) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

電磁場中の自由電子 (パウリ近似)

$$\left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + e\phi - c\vec{\alpha} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) - \beta mc^2 \right\} \psi = 0$$

$E > 0$ として

$$\begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \frac{c\vec{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A})}{E + e\phi + mc^2} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

$E + e\phi + mc^2 \approx 2mc^2$, $\vec{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \vec{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) = (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + e\hbar\vec{\sigma} \cdot \mathbf{H}$ を用いて

$$\left\{ \frac{1}{2m} (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + \frac{e\hbar}{2m} \vec{\sigma} \cdot \mathbf{H} - e\phi \right\} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

中心力場

$$H = c\vec{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2 + V(r)$$

$$E' = E - mc^2$$

$$\left[\frac{1}{2m(1 + \frac{E' - V}{2mc^2})} \mathbf{p}^2 + V - \frac{\hbar^2}{4m^2 c^2} \frac{dV}{dr} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2m^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \vec{\ell} \cdot \vec{s} \right] \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = E' \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

ベクトルの合成:合成角運動量

$$\mathbf{j} = \vec{\ell} + \mathbf{s}$$

$$|\ell s : jm_j \rangle = \sum_{m_\ell m_s} |\ell m_\ell : sm_s \rangle \langle \ell m_\ell : sm_s | jm_j \rangle$$

ヴィグナー係数, クレプシュ. ゴーダン係数

$$\begin{aligned} \langle J_1 M_1 J_2 M_2 | JM \rangle &= \delta(M, M_1 + M_2) \sqrt{2J + 1} \Delta(j_1 J_2 J) \\ &\times \sqrt{(J_1 + M_1)!(J_1 - M_1)!(J_2 + M_2)!(J_2 - M_2)!(J + M)(J - M)!} \\ &\times \sum_z (-1)^Z [Z!(J_1 + J_2 - J - Z)!(J_1 - M_1 - Z)!(J_2 + M_2 - Z)! \\ &\quad \times (J - J_2 + M_1 + Z)!(J - J_1 - M_2 + Z)!]^{-1} \end{aligned}$$

$$\Delta(J_1 J_2 J) = \sqrt{\frac{(J_1 + J_2 - J)!(J + J_1 - J_2)!(J + J_2 - J_1)!}{(J_1 + J_2 + J + 1)!}}$$