

物理学 A その6

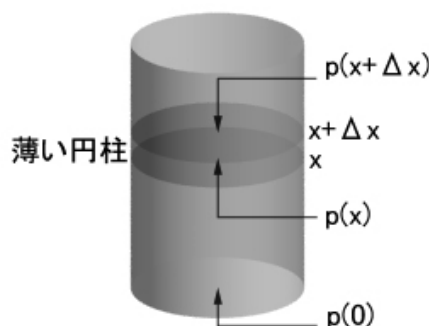
ではそろそろ問題演習を始めましょう。授業で配られた演習問題を見てみると問題5が結構難しいです。この演習プリントと同レベルの問題が試験になるとすると少々辛いテストになるかもしれません。だって最終的にはラグランジュアン、ハミルトニアンまでやるらしいし…。そういう訳で早めに演習のためのプリントを作っておきます。

・演習1 テイラー展開と微分方程式

地面に垂直な空気の円柱を考える。高さ x の所にある厚さ Δx の薄い円柱を考えるとこの円柱の底面での力のつりあいは

$$p(x + \Delta x) + \rho(x)g\Delta x = p(x) \quad ()$$

となる。 $p(x)$ 、 $\rho(x)$ はそれぞれ高さ x での気圧と密度である。重力加速度 g は一定と見なせるものとし、空気の密度は一定であるとした。いま、空気の分子量が M の一種類の分子で構成されているものと仮定し、1モルの体積を V とすると $\rho = M/V$ である。



- (1) 円柱は十分薄くその中の気圧は一定であると
する。空気を理想気体と見なし $p(x)$ と $\rho(x)$ の関係を導け。
- (2) () 式の $p(x + \Delta x)$ をテイラー展開し Δx の1次の項までの近似を使って $p(x)$ の微分方程式を導け。
- (3) 温度が高さによらない事を仮定する。地表での気圧を p_0 とし、(2)の微分方程式の特解を求めよ。
- (4) 空気の分子量を $M = 29 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ と仮定し $T = 290 \text{ K}$ 、 $R = 8.3 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ 、 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ $\log 2 = 0.69$ として気圧が地上の半分になる高さを求めよ。

(物理学ゼミナール No. 4 より)

・演習2 質量の変化する系 問題5の類題

床の上にかたまっている線密度 λ の鎖の一端をもって鉛直に引き上げる。引き上げられた部分の長さが x 、速さが v 、加速度が a の時上端を動かしている力の大きさを求めよ。

この場合引き上げられる部分の質量は変化していくので、運動方程式は

$$\frac{d}{dt}(mv) = F$$

・演習3 質量の変化する系 問題5の類題

線密度 λ 長さ L の鎖の上端を右手にもって鉛直にたらし、左手を広げて下端を手の中心に添えて触れるようにしておく。右手を離して左手を動かさず鎖を受け止める場合長さ x だけ受け止めた瞬間の左手の受ける力を求めよ。

演習に関しては要望があり次第解答を作成します。