

物理学A その2

第1回目の授業で出題された宿題、できないという声があったので解答を作ります。必ず1度は自分でやってみてください。30分くらいかかるかもしれません。

$$e_r = e_x \sin \theta \cos \varphi + e_y \sin \theta \sin \varphi + e_z \cos \theta$$

$$e_\theta = e_x \cos \theta \cos \varphi + e_y \cos \theta \sin \varphi - e_z \sin \theta$$

$$e_\varphi = -e_x \sin \varphi + e_y \cos \varphi$$

これ 授業中にやったと思います。

では $x = r \sin \theta \cos \varphi$ 、 $y = r \sin \theta \sin \varphi$ 、 $z = r \cos \theta$ を2回丁寧に微分します。

$$\begin{aligned} \ddot{x} = & \ddot{r} \sin \theta \cos \varphi - r \ddot{\theta} \sin \theta \cos \varphi - r \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + r \ddot{\theta} \cos \theta \cos \varphi \\ & + 2 \dot{r} \dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - r \ddot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi - 2 \dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi - 2 r \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} = & \ddot{r} \sin \theta \sin \varphi - r \ddot{\theta} \sin \theta \sin \varphi - r \dot{\theta}^2 \sin \theta \sin \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + r \ddot{\theta} \cos \theta \sin \varphi \\ & + 2 \dot{r} \dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + r \ddot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi + 2 \dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi + 2 r \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\ddot{z} = \ddot{r} \cos \theta - r \ddot{\theta} \cos \theta - r \dot{\theta}^2 \cos \theta - 2 \dot{r} \dot{\theta} \sin \theta$$

ではガリガリいきましょう。

$$a = \ddot{x} e_x + \ddot{y} e_y + \ddot{z} e_z \quad (\text{上式に代入して整理})$$

$$\begin{aligned} & = (r \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta - r \ddot{\theta}) (e_x \sin \theta \cos \varphi + e_y \cos \theta \sin \varphi + e_z \cos \theta) \\ & \quad + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \varphi) (e_x \cos \theta \cos \varphi + e_y \cos \theta \sin \varphi - e_z \sin \theta) \\ & \quad + (r \ddot{\varphi} \sin \theta + 2 \dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta + 2 r \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta) (-e_x \sin \varphi + e_y \cos \varphi) \\ & = (r \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta - r \ddot{\theta}) e_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \varphi) e_\theta \\ & \quad + (r \ddot{\varphi} \sin \theta + 2 \dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta + 2 r \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta) e_\varphi \end{aligned}$$

よってそれぞれの項が r 、 θ 、 φ 方向の加速度となります。それぞれを日本語で動径加速度、緯度加速度、経度加速度といいます。