物理学Ａ

Taylor 展開

　無限に微分可能な関数 $f(x)$ に対して、次のようにベキ級数展開できることが知れている。

$$f(x+a)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \qquad a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

また、この展開係数は常に１通りに定まる。また２つの関数の展開係数が一致する時その関数は全く同じものである、と言える。

　なぜこのように一意性が言えるのか、またこれらの無限級数は常に収束するという保証はどこにあるのか？ということに関しては数学Ｉの授業をまたれたい。事後これらのことを仮定して進めたい。

問：$f(x)=\sin x$、$g(x)=\cos x$　　をテイラー展開せよ。（ａ＝０としてよい）

　それではさっそく次式をベキ級数展開することで解いてみたい。ばね定数ｋ＝１、重りの質量m＝１の時の微分方程式である。

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-y \qquad \cdot\cdot ①$$

ここでｙの微分可能性を仮定、次のようにベキ級数展開可能なことも仮定する。

$$y=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3\cdots$$

ではｔで微分しよう。

$$\frac{dy}{dt}=a_1+2a_2t+3a_3t^2+4a_4t^3\cdots$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=2a_2+(2\cdot3)a_3t+(3\cdot4)a_4t^2+(4\cdot5)a_5t^3\cdots$$

①に代入してｔのｎ次同士を係数比較する。

$$a_0=-2a_2 \qquad a_2=-(3\cdot4)a_4 \qquad a_4=-(5\cdot6)a_6$$

$$a_1=-(2\cdot3)a_3 \qquad a_3=-(4\cdot5)a_5 \qquad a_5=-(6\cdot7)a_7$$