# 力学 4

## 10. 運動する座標系

(1) 慣性に対して等速直線運動をする系 $(0', x', y', z')$ : Galilei 変換

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + x' \\
y &= y_0 + y' \\
z &= z_0 + z'
\end{aligned}
$$

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = F'_x \quad etc.$$

(2) 慣性系に対して加速運動をする座標系

$$m\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F} + (-m\frac{d^2\mathbf{r}_0}{dt^2})$$

(3) 慣性系に対して一定の角速度で回転する座標系

$(O, x, y, z)$ 系 : $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$

$(O, x', y', z')$ 系 : $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}' \\
\frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} = \dot{x}'\mathbf{i}' + \dot{y}'\mathbf{j}' + \dot{z}'\mathbf{k}' + x'\frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y'\frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z'\frac{d\mathbf{k}'}{dt}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbf{i}' &= \vec{\omega} \times \mathbf{i}' \\
\frac{d}{dt}\mathbf{j}' &= \vec{\omega} \times \mathbf{j}' \\
\frac{d}{dt}\mathbf{k}' &= \vec{\omega} \times \mathbf{k}'
\end{aligned}
$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r} = \dot{x}'\mathbf{i}' + \dot{\mathbf{y}}'\mathbf{j}' + \dot{z}'\dot{\mathbf{k}}' + \vec{\omega} \times (x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}')$$
$$i.e. \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \vec{\omega} \times \mathbf{r}'$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r} &= \ddot{x}\dot{\mathbf{i}} + \ddot{y}\dot{\mathbf{j}} + \ddot{z}\mathbf{k} \\
&= \ddot{x}'\dot{\mathbf{i}}' + \ddot{y}'\mathbf{j}' + \ddot{z}'\mathbf{k}' + 2\vec{\omega} \times \mathbf{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}')
\end{aligned}$$

$$i.e. \quad m\vec{\alpha} = \mathbf{F} - 2m\vec{\omega} \times \mathbf{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}')$$

11. 仮想仕事の原理

静止した系：

$$\mathbf{F}_i = 0$$
$$i.e. \qquad \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$$

運動する系：

$$\mathbf{F}_i - m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = 0$$
$$i.e. \qquad \sum_i (\mathbf{F}_i - m_i\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2}) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$$

12.Lagrange の運動方程式

$$\sum_i \{(F_{ix} - m_i\ddot{x}_i)\delta x_i + (F_{iy} - m_i\ddot{y}_i)\delta y_i + (F_{iz} - m_i\ddot{z}_i)\delta z_i\} = 0$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = -\int_{t_1}^{t_2} \sum_i m_i(\ddot{x}_i\delta x_i + \cdot\cdot)dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U)dt = 0 \ \text{ or } \ \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad L = T - U$$

$$\delta T = \sum_r \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \delta \dot{q}_r + \frac{\partial T}{\partial q_r} \delta q_r \right)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T \, dt = - \int_{t_1}^{t_2} \sum_r \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} \right) \delta q_r \, dt$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0$$

13. ハミルトンの正準方程式

$$p_r \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}$$

$$\frac{d}{dt} p_r = \frac{\partial L}{\partial q_r}$$

ルジャンドル変換

$$H = \sum p_r \dot{q}_r - L(q_1 \cdots \dot{q}_1 \cdots, t)$$

$$H = H(q_1 \cdots, p_1 \cdots; t)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_r}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} \\ \frac{dp_r}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_r} \end{aligned}$$