力学3

6．運動の保存量：角運動量

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v})$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x)$$

$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 = |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2 \sin^2\theta$

$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} = 0,\ (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} = 0$

中心力場:

$$\mathbf{F} = (f(r)\frac{x}{r},\, f(r)\frac{y}{r},\, f(r)\frac{z}{r})$$

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$$

したがって

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{r} \times f(r)\frac{\mathbf{r}}{r} = 0\ .$$

よって

$$\mathbf{L} = \text{一定}$$

すなわち運動の間角運動量は一定に保たれる。

8. 質点系

$$m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i + \sum_{j(\neq i)} \mathbf{F}_{ij}$$

(1) 重心

$$\mathbf{R}_G = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M}\ .$$

ただし

$$(M = \sum_i m_i)\ .$$

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_G + \mathbf{r}_i{}', \quad :ただし定義から \quad \sum_i m_i \mathbf{r}'_i = 0$$

$$\mathbf{V}_G = \dot{\mathbf{R}}_G$$

$$重心の運動方程式：\ M\ddot{\mathbf{R}}_G = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F}.$$

(2) 運動量 (重心の運動量＝全運動量 (各質点の運動量の和))

$$\mathbf{P}_G = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = M\dot{\mathbf{R}}_G\ .$$

$$\frac{d\mathbf{P}_G}{dt} = M\ddot{\mathbf{R}}_G = \sum_i \mathbf{F}_i + \sum_i \sum_{j(\neq i)} \mathbf{F}_{ij} = \sum_i \mathbf{F}_i\ .$$

もし $\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = 0$ であるなら

$$\frac{d\mathbf{P}_G}{dt} = 0 \ \ (全運動量保存).$$

(3) 角運動量

$$各質点の各運動量の和：\mathbf{L} = \sum_i m_i(\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i)\ .$$

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{V}_G + \dot{\mathbf{r}}_i{}'$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{R}_G \times M\mathbf{V}_G + \mathbf{L}_G$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{R}_G \times \mathbf{F} + \frac{d\mathbf{L}_G}{dt}$$

$$重心のまわりの角運動量：\ \mathbf{L}_G = \sum \mathbf{r}'_i \times (m_i \mathbf{v}'_i)\ .$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{L}_G}{dt} &= \sum_i \mathbf{r}_i{}' \times m_i \ddot{\mathbf{r}}'_i \\
&= \sum_i \mathbf{r}_i{}' \times \mathbf{F}_i - \sum_i \mathbf{r}_i{}' \times m_i \mathbf{R}_G + \sum_i \sum_{j(\neq i)} \mathbf{r}_i{}' \times \mathbf{F}_{ij}
\end{aligned}$$

であるから

$$\frac{d\mathbf{L}_G}{dt} = \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{N}_G \quad \text{（重心のまわりの力のモーメント）}.$$

重心のまわりの力のモーメント $\mathbf{N}_G = 0$ であるなら

$$\frac{d\mathbf{L}_G}{dt} = 0\ ,$$

すなわち剛体は回転しない。
外力 $\mathbf{F}_i = 0$ であるなら

$$\frac{d\mathbf{L}_G}{dt} = 0\ , \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \quad \text{（角運動量保存）}.$$

(4) エネルギー

$$\Big[\sum_i \frac{1}{2} m v_i^2\Big]_{t_2} - \Big[\sum_i \frac{1}{2} m v_i^2\Big]_{t_1} = \int_1^2 \sum_i (\mathbf{F}_i + \sum_{j(\neq i)} \mathbf{F}_{ij}) \cdot d\mathbf{r}_i$$

9. 剛体

9-1. 剛体のつり合い
剛体のつり合い（静止した剛体）では

$$\sum \mathbf{F}_i = 0\ ,$$

$$\sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0\ .$$

9-2. 固定軸（z軸とする）を持つ剛体の運動

固定した回転軸の周りの角運動量は

$$L_z = I\omega$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = N \quad .$$

あるいは

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (\text{回転の角速度})$$

とすれば

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = N$$

9-3. 剛体の慣性モーメント

$$\begin{aligned} I &= \int \mathbf{r}_\perp^2 dm = \int\int\int \mathbf{r}_\perp^2 \rho dxdydz = \int\int\int (\mathbf{r}' + \mathbf{R}_G)_\perp^2 \rho dx'dy'dz' \\ &= I_G + Mh^2 \end{aligned}$$

ただし $\mathbf{r}_\perp$は、$\mathbf{r}$ の回転軸に垂直な平面内の成分.（訂正 7/13）

9-4. 剛体の平面運動

重心の運動方程式（xy平面内）

$$M\ddot{X} = F_x, \quad M\ddot{Y} = F_y.$$

重心の周りの回転

$$I_G\frac{d^2\varphi}{dt^2} = N_{Gz}.$$