力学

3．簡単な運動

A. 外力の働かない場合

$$\text{運動方程式：}\dot{\mathbf{v}} = 0$$

$$\text{初期条件：}\mathbf{r}(t=0) = \mathbf{r}_0,\quad \mathbf{v}(t=0) = \mathbf{v}_0$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0)$$

B. 外力が一定の場合

$$\text{外力：}\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_0$$

$$\text{運動方程式：}m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}_0$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \frac{\mathbf{F}_0}{m}(t - t_0)$$

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{F}_0}{2m}(t - t_0)^2 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \mathbf{r}_0$$

C. 単振動（1 次元調和振動）

$$\text{外力 } F = -kx$$

$$\text{運動方程式：}m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

逐次近似：ただし初期条件を $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = b'$

第 0 近似　(初期条件のみ満たす適当な解) : $x_0(t) = a + b't$

第 1 近似　$\ddot{x}_1(t) = -\omega^2 x_0(t)$:

$$x_1(t) = -\frac{\omega^2}{2!}t^2 a + a - \frac{\omega^2}{3!}t^3 t' + b't$$

第 2 近似　$\ddot{x}_2(t) = -\omega^2 x_1(t)$:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \frac{\omega^4}{4!}t^4 a - \frac{\omega^2}{2!}t^2 a + a + \frac{\omega^4}{5!}t^5 t' - \frac{\omega^2}{3!}t^3 b' + b't \\ &= a\Big(1 - \frac{\omega^2}{2!}t^2 + \frac{\omega^4}{4!}t^4\Big) + \frac{b'}{\omega}\Big(\omega t - \frac{\omega^3}{3!}t^3 + \frac{\omega^5}{5!}t^5\Big) \end{aligned}$$

第 n 近似　$\ddot{x}_n(t) = -\omega^2 x_{n-1}(t)$:

$$\begin{aligned} x_n(t) &= a\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m\omega^{2m}}{(2m)!}t^{2m}+\frac{b'}{\omega}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m\omega^{2m+1}}{(2m+1)!}t^{2m+1} \\ &= a\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m\omega^{2m}}{(2m)!}t^{2m}+b\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m\omega^{2m+1}}{(2m+1)!}t^{2m+1} \end{aligned}$$

以上を続けていけば最終的に

$$x_n(t) = a\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\omega^{2m}}{(2m)!}t^{2m}+b\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\omega^{2m+1}}{(2m+1)!}t^{2m+1}$$

を得る。第 1 項、第 2 項はそれぞれ $\cos\omega t$, $\sin\omega t$ をべき級数展開したものになっている (テーラー展開)。

$$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t \quad \text{または}$$

$$x = A\sin(\omega t-\phi)$$

[テーラー展開] おおよそ、物理現象の多くの場合に現れる素直な関数 $f(x)$ は適当な点 $x = x_0$の周りで $(x-x_0)$ で級数

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

と書ける。それぞれの係数は $f(x)$ の x_0における微分係数でかけ

$$\begin{aligned} a_0 &= f(x_0) \\ a_n &= \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\ . \end{aligned}$$

D. 単振子

$$\text{運動方程式：} ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2\sin\theta$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots \quad \text{(サイン関数のテーラー展開)}$$

$$\text{微小振動の場合 } \ddot{\theta} = -\omega_0^2\theta$$

$$\theta = A\cos(\omega_0 t - \phi)$$

E. 減衰振動

$$\text{運動方程式：} m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx - 2mk\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2k\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

定数係数 2 階常微分方程式の解法：定石

$$x = e^{\lambda t}$$

$$\lambda = -k \pm \sqrt{k^2 - \omega_0^2}$$

i) $k < \omega_0$ の時

$$x = ae^{-kt}\cos(\sqrt{\omega_0^2 - k^2}t - \phi)$$

ii) $k > \omega_0$ の時

$$x = e^{-kt}(Ae^{\sqrt{k^2-\omega_0^2}t} + Be^{-\sqrt{k^2-\omega_0^2}t})$$

iii) $k = \omega_0$の時：２つのλは同じ値になる。1 つの解は $e^{\lambda t}$でよいが、もう 1 つの解は別の方法で探す。

$$\text{定数変化法：} x = \xi(t)e^{-kt}$$

これを解いて

$$\xi = At + B$$

$$x = e^{-kt}(At + B)$$

F. 強制振動

$$\text{運動方程式：} m\frac{dt^2}{d^2x} = -cx + F(t)$$

$$\text{外力：} F = X_0 \sin\omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{X_0}{m}\sin\omega t$$

非同次微分方程式（上の右辺のように、x には関係せず t の関数である項をふくむ）の解は（常微分方程式の場合）、

同次方程式の一般解 + 非同次方程式の特解

となる。（特解：初期条件を満たす解のうちの適当な１つ）

$$x = A\sin\omega t + a\sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$A = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\cdot\frac{X_0}{m}$$

$\omega = \omega_0$の場合：再び同次方程式のλが重根を持つ場合となる。この時には、

$$x(t) = At\cos\omega_0 t + Bt\sin\omega_0 t$$

として特解を探すことができる。実際これを元の運動方程式に代入すれば

$$2\omega_0(-A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t) = \frac{X_0}{m}\sin\omega_0 t$$

であるから、

$$A = -\frac{X_0/m}{2\omega_0}, \quad B = 0$$

となる。

$$x = -\frac{X_0/m}{2\omega_0}t\cos\omega_0 t + a\sin(\omega_0 t + \phi)$$

4. 運動の保存量

a. 運動量

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

$$\text{質点の運動方程式}\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}$$

$$\Rightarrow \text{外力} \equiv 0 \Rightarrow m\mathbf{v} = \text{一定（運動量の保存）}$$

b. 運動量の保存 （2 質点）
外力が働かないならば

$$\mathbf{p} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i : \text{保存}$$

5. 運動の保存量：エネルギー

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}$$

$$m(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}) = F_x\frac{dx}{dt} + F_y\frac{dy}{dt} + F_z\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2) = F_x\frac{dx}{dt} + F_y\frac{dy}{dt} + F_z\frac{dz}{dt}.$$

時間 dt 内の$\frac{1}{2}mv^2$の変化$\equiv d(\frac{1}{2}mv^2)$
時間 dt 内の位置ベクトル $\mathbf{r}$ の変化$\equiv d\mathbf{r}$
運動エネルギーの変化 $d(\frac{1}{2}mv^2)$
したがって上の式は

$$d(\frac{1}{2}mv^2) = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

と書ける。右辺は短い時間 dt 内に外力により質点が $d\mathbf{r}$ だけ動き、そのとき外力が質点になした仕事である。積分して、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 &= \int_{\mathbf{r_1}}^{\mathbf{r_2}}(F_x dx + F_y dy + F_z dz) \equiv \int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \\ &\equiv \int_{t_1}^{t_2}(F_x\frac{dx}{dt} + F_y\frac{dy}{dt} + F_z\frac{dz}{dt})dt \equiv \int \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt.\end{aligned}$$

力 $\mathbf{F}$ が、位置 $\mathbf{r}$ の関数 $U(\mathbf{r}) = U(x, y, z)$ により

$$F_x = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}$$

$$F_y = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}$$

$$F_z = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}$$

と表されるとき、このような力を**保存力**という。
$U(x,y,z)$ の変化量は

$$dU = U(x+dx, y+dy, z+dz) - U(x,y,z) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

であるから

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz) \equiv -dU(x,y,z)\ .$$

$\mathbf{r}_1$から $\mathbf{r}_2$まで力 $\mathbf{F}$ によって質点が動いたとき、力 $\mathbf{F}$ が質点になした仕事は

$$W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2}(-dU) = -U(\mathbf{r}_2) + U(\mathbf{r}_1)$$

である。以上より、

$$\frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2 = -U(\mathbf{r}_2) + U(\mathbf{r}_1)$$

あるいは、

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x,y,z) = \text{一定（力学的エネルギー）}.$$

保存力の場

$$\mathbf{F} = (-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z}) = -\nabla U(x,y,z)$$

$\mathbf{F}$：力の場
$U(\mathbf{r})$：一定の曲面（等高線面）を空間に描くと、$\mathbf{F}(\mathbf{r})$ はそれに直交し、ベクトルの長さは Uの勾配に比例する。