力学 — 演習問題 回答

[問題 1] 省略

[問題 2] 質点の x 座標を x、またバネの固定点から質点までの距離を $l = \sqrt{L^2+x^2}$とする。伸びたバネと垂直軸のなす角をθ とすると、バネにより質点に働く力の x 方向の成分は

$$-k(l-l_0)\sin\theta = -k(l-l_0)\frac{x}{l} = -k(1-\frac{l_0}{\sqrt{L^2+x^2}})x \simeq -k(1-\frac{l_0}{L})x \ .$$

質点は軸上を単振動し、その振動数は$\omega = \sqrt{\frac{k(1-l_0/L)}{m}}$。

[問題 3]

[3-1] $\tan^{-1} x$ のテイラー展開には逆関数の微分を知る必要がある。$y = \tan^{-1} x$ とすると $x = \tan y$。両辺を x で微分し、

$$1 = \frac{d}{dx}\tan y = \frac{1}{\cos^2 y}\frac{dy}{dx}$$

よって、

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y.$$

これをさらに x で微分し

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2\cos y\sin y\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = -2(\cos^4 y - 3\cos^2 y\sin^2 y)\frac{dy}{dx}$$

などを得る。これらを用い、また $x=0$ のとき $y=0$ であることに注意し、テイラー展開の定義式を用いれば、

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\cdots.$$

[3-2]

$$\mathrm{e}^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \cdots.$$

各項を 0 から 1 まで積分し

$$\int_0^1 dx\mathrm{e}^{-x^2} = \Big[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216} - \cdots\Big]_0^1$$

符号は交互に正負になり、各項の係数の絶対値は $1/n$ 程度で小さくなる。5 項目で値は $0.0046\cdots$ であるからここで十分であり、5 項目までの値は $0.7428\cdots$.

[問題 5] 運動量の変化＝力積は $\{(m+dm)(v+dv)-(v-v_0)dm\}-mv = Fdt$ であるから $mdv+v_0dm = Fdt$ を得る。外力は $F = -mg$であるから整理して、

$$dv + gdt + v_0\frac{dm}{m} = 0$$

となる。これを積分すれば積分定数をまとめて C として $v+dt+C+v_0 \ln m = 0$、あるいは $C = -v_0 \ln m_0$と書くと

$$v + gt + v_0 \ln \frac{m}{m_0} = 0$$

あるいは

$$\frac{m}{m_0} = \exp(-\frac{v+gt}{v_0})$$

を得る。演習時に我妻君が指摘したように、「ロケットを望む速度にコントロールするには燃料の燃焼速度（$m(t)$ の変化）をどうコントロールすればよいか」とこの式を見ることができる。$t = 0$ のときの値から m_0は $v(0)/v_0 = \ln m(0)/m_0$である。$t = 0$ のときロケットの速度が 0（$v(0) = 0$）であるなら $m_0 = m(0)$ である。$dm/dt = \mu$(一定）なら $m(t) = m(0) - \mu t$ とおけばよい。

[問題 6] 運動量保存から $m_1v_1 \pm m_2v_2 = (m_1+m_2)v$. ただ$\pm$は 2 つの粒子が同じ方向に進んでいるか反対方向に進んでいるかによる。vは合体後の速度。これから合体後の速度は

$$v = \frac{m_1v_1 \pm m_2v_2}{m_1+m_2}.$$

運動エネルギーの変化は

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 - \frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}m_2v_2^2 = -\frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(v_1 \pm v_2)^2$$

となる。この差（エネルギーの損失）は衝突の際の熱などになっている。

[問題 7] 斜面に沿って上向きに x 軸をとる。質点が斜面から垂直方向に受ける抗力を N、質点に斜面（下）方向に働く力を F、摩擦力を F'とすると

$$N = mg\cos\alpha, \quad F' = \mu mg\cos\alpha, \quad F = -mg\sin\alpha$$

である。したがって運動方程式は

$$m\ddot{x} = -mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

となる。したがって$\mu < \tan\alpha$ なら斜面を滑り降りる質点は次第に加速される。一方$\mu > \tan\alpha$ なら質点は次第に減速され、初速度 v_0とすると $t = v_0/g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)$ 後には斜面上で止まる。

[問題 8] バネに直接つけられた質点の水平方向の座標を $x_1 = x$ とすると、糸の先につけられた質点の水平方向の座標を x_2 は $x_2 = x + l\theta$となる。ただし垂直軸と糸のなす角をθとし、θ は微少角とする。糸に沿って働く張力を Tとする。このとき水平方向の質点 1 の運動方程式は

$$m_1\ddot{x} = -kx + T\sin\theta,$$

質点 2 の糸に直角方向および平行方向の運動方程式は

$$\begin{aligned} m_2 l\ddot{\theta} &= -mg\sin\theta - m\ddot{x}\cos\theta, \\ m_2 l\dot{\theta}^2 &= T - mg\cos\theta + m\ddot{x}\sin\theta \end{aligned}$$

となる。$\sin\theta \simeq \theta$、$\cos\theta \simeq 1$ としてまた Tを消去すると

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + l\ddot{\theta} = -g\theta \\ &(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l\ddot{\theta} = -kx \end{aligned}$$

を得る。この連立微分方程式を解く。$x(t) = x_0\exp(i\omega t)$, $\theta(t) = \theta_0\exp(i\omega t)$ という解を仮定して上の式に代入すると

$$A = \frac{kl}{(m_1 + m_2)g}, \ B = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \ \gamma_0 = \frac{1}{2B}\{-(1-A) \pm \sqrt{(1-A)^2 + 4AB}\}$$

とおいて、解として

$$\begin{aligned} \frac{l\theta_0}{x_0} &= \gamma_0 \\ \omega^2 &= \frac{g}{l} \cdot \frac{\gamma_0}{1 + \gamma_0} \end{aligned}$$

を得る。このような単振動をする。

[注] このような問題ではラグランジュ形式を使うと良い。張力 Tは内部力だから運動エネルギー T、ポテンシャルエネルギー Uに含まれず

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x} + l\dot{\theta})^2 \\ U &= \frac{1}{2}kx^2 + m_2 gl(1 - \cos\theta) \simeq \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m_2 gl\theta^2 \end{aligned}$$

である。これからラグランジュの運動方程式を求めると同様の結果を得る。

[問題 9] 原点からの距離$\boldsymbol{r}$ を用いて$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$ である。原点から直線運動の軌跡に下ろした垂線の長さを a とすると上の式から $l = mav$.

[問題 10] 省略

[問題 11]

[慣性系] 質点と円環の中心を結んだ半径と垂直線とのなす角をθとする。円環から質点に働く垂直抗力を Nと書くと $N\cos\theta = mg$。これが円運動しているから

$$m(a\sin\theta)\omega^2 = N\sin\theta.$$

ゆえに

$$\cos\theta = \frac{g}{a\omega^2}.$$

よってそこから質点までの高さ h は

$$h = a - a\cos\theta = a - \frac{g}{\omega^2}.$$

[円環の上の座標系] 遠心力と重力の合力が垂直抗力とつりあっているから

$$\frac{ma\sin\theta\omega^2}{mg} = \tan\theta$$

これから

$$\cos\theta = \frac{g}{a\omega^2}$$

を得る。後は同じ。

[12] 半径を a とすると密度は$\rho = M/(\frac{4\pi a^3}{3})$、体積要素は$dv = \sin\theta r^2 d\phi d\theta dr$。回転軸から点$(r, \theta, \phi)$ までの距離は $r\sin\theta$。したがって慣性モーメントは

$$I = \int dv\rho(r\sin\theta)^2 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^a r^2 dr\ \rho r^2 \sin^2\theta = \frac{2}{5}a^2 M.$$

[13] 斜面い沿った円筒の運動方程式、回転の方程式を書く。円筒が斜面に接するところで円筒に（上向きに）働く力を Fとすると、

$$M\ddot{x} = Mg\sin\theta - F, \quad I\dot{\omega} = Fa.$$

さらに円筒が滑らないということから $\dot{x} = a\omega$ である。円筒の慣性モーメントは $I = M\frac{a^2}{2}$である。これらから Fを消去して摩擦力 Fは $F = \frac{1}{3}Mg\sin\alpha$ 、運動方程式は$\ddot{x} = \frac{2}{3}g\sin\alpha$ となる。したがって円筒は一定加速度で転がっていくことになる。

[14] 省略

[15] 糸の固定点に近い方の質点を 1、遠い方の質点を 2 とし、質量、座標に添え字 1，2 をつける。また糸の固定点と質点 1 を結ぶ線が垂直線となす角をθ_1, 質点 1，2 を結ぶ線と垂直線がなす角をθ_2とする。平行方向を x、上向きに y座標を取ると、運動エネルギー T、ポテンシャルエネルギー Uは

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\
U &= m_1 g y_1 + m_2 g y_2.
\end{aligned}
$$

ここで $x_1 = l_1 \sin\theta_1,\ x_1 = -l_1\cos\theta_1,\ x_2 = l_1\sin\theta_1 + l_2\sin\theta_2,\ y_2 = -l_1\cos\theta_1 - l_2\cos\theta_2$. ここまでは一般的に書いたが、$m_1 = m_2$, $l_1 = l_2$ を用い、また角度は微少であるとしてラグランジジュの運動方程式を書けば

$$
\begin{aligned}
\ddot{\theta}_1 &= \frac{g}{l}(-2\theta_1 + \theta_2) \\
\ddot{\theta}_2 &= \frac{g}{l}(2\theta_1 - 2\theta_2)
\end{aligned}
$$

を得る。

$\theta_1 = \theta_1^0\exp(i\omega t),\ \theta_2 = \theta_2^0\exp(i\omega t)$ と仮定して代入すると $(a^2 = g/l)$、解を持つ条件として $(\omega^2 - 2a^2)^2 - 2a^4 = 0$ を得る。したがって$\omega^2 = (2 \pm \sqrt{2})a^2$を得る。また振動の振幅の比として$\frac{\theta_2^0}{\theta_1^0} = \mp\sqrt{2}$.