力学 — 演習問題 1

問題 1

[1-1] 質量 m の質点を、水平面とθ_0の角度をなす方向に、初速度 v_0で投げ上げたとき、それ以降の質点の運動を記述する運動方程式を示せ。ただし重力以外の影響は無視せよ。次にこの微分方程式を解いて質点の運動を論じよ。

[1-2] 問題 [1-1] と同じ状況で速度に比例した抵抗が働く場合に、同じ条件で質点の運動を記述する運動方程式を書け。次にこの微分方程式を解いて質点の運動を議論せよ。

問題 2 滑らかな水平面内の x 軸上 $(y = 0)$ に滑らかに束縛された質量 m の質点に、自然長 l_0、ばね定数 kのばねを結び付け、ばねの他端を y軸上の原点から L の点に固定した $(L > l_0)$。この質点の原点近傍での微小変位の運動を論じよ。

問題 3

[3-1] $\tan^{-1} x$ を $x = 0$ の周りでテーラー展開（べき級数展開）せよ。

[3-2] e^xのべき級数で x を$-x^2$に置き換えることで e^{-x^2} のテーラー級数を求めよ。これの各項を積分することにより、

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

の値を、1%の精度で求めよ。この定積分の正しい値は $0.748\cdots$である。

問題 4(電磁場中の荷電粒子の運動）電磁場（電場 $\mathbf{E}$、磁場 $\mathbf{B}$）中で、速度 $\mathbf{v}$ 電荷 qをもった粒子が受ける力は（電場から受ける力 $q\mathbf{E}$ と電流が磁場から受ける力 $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ）

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

である（ローレンツ力)。

[4-1] この粒子に対する運動方程式を書き、さらにそれらをベクトルの成分ごとに分けて書いてみよ。

[4-2] $\mathbf{E}=0$ でかつ磁場 $\mathbf{B}$ が時間に依らず一定の場合、磁場の方向を z軸方向として運動方程式を書いてみよ。ただし $t=0$ で粒子の初期位置および初速度は $\mathbf{x}_0=(x_0,y_0,z_0)$、$\mathbf{v}_0=(v_{0x},v_{0y},v_{0z})$ とする。さらにこれを解いて、粒子は z方向に等速直線運動、$x-y$平面内で円運動をすることを示し、円運動の角振動数を求めよ (サイクロトロン振動数)。

問題 5(力積) 質量 m のロケットが、質量の変化率 $\frac{dm}{dt}=\mu$(一定) の割合で燃料ガスを後方に（ロケットから見て）一定速度 v_0で放出しながら進んでいる。時刻 t におけるロケットの質量を $m(t)$、速度を $v(t)$ としたとき、ロケットの運動量は $p(t)=m(t)v(t)$ である。時刻 $t+dt$ では、ロケットの質量は $m(t+dt)=m(t)+dm$、速度は $v(t+dt)=v(t)+dv$と書こう。さらにこのとき排出されるガスが持つ運動量は、質量$-dm$、速度 $v(t)-v_0$であるから、$-(v(t)-v_0)dm$ である。したがって、ロケットとガスが持つ運動量は $p(t+dt)=(m(t)+dm)(v(t)+dv)-(v(t)-v_0)dm$ となる。

ロケットに働く地球の重力を考え、外力の力積＝運動量の変化、という式から運動方程式を導け。次にこの式を解いて、ロケットの運動を議論せよ。