Chapter 6

フーリエ変換

6.1 フーリエ変換

複素フーリエ級数は (5.18)(5.19) で

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(i\frac{n\pi x}{a}) = \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)], \quad x \in [-a,a] \\ c_n &= \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x)\exp(-i\frac{n\pi x}{a})dx \end{aligned} \tag{6.1}$$

と定義された。ここで

$$k_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \Delta k_n = k_{n+1} - k_n = \frac{\pi}{a} \tag{6.2}$$

とおいて (6.1) 第 2 式を書き直すと係数 c_n は

$$c_n = \frac{\Delta k_n}{2\pi}\int_{-a}^{a} d\xi f(\xi)e^{-ik_n\xi}.$$

となる。これを (6.1) 第 1 式に代入すれば

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)] = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ik_nx}\Delta k_n \int_{-a}^{a} d\xi f(\xi)e^{-ik_n\xi}$$

と書くことができる。さらに $a \to \infty,\ \Delta k_n \to 0$ の極限操作を行うと、和は

$$\sum_n \Delta k_n \to \int dk$$

と積分に移行するから

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi f(\xi)e^{-ik\xi} \tag{6.3}$$

が得られる。これをフーリエの積分公式という。

ここで関数 $f(x)$ は $(-\infty,\infty)$ において有界変動関数でかつ

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx|f(x)| = \quad \text{有界} \tag{6.4}$$

でなくてはならない。

$$F(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi f(\xi)e^{-ik\xi} \equiv \mathcal{F}[f(x)] \tag{6.5}$$

と書けば、(6.3) は

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)] = \int_{-\infty}^{\infty} dke^{ikx}F(k) \equiv \mathcal{F}^{-1}[F(k)] \tag{6.6}$$

とあらわされる。 x が $f(x)$ の連続点ならば

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dke^{ikx}F(k) = \mathcal{F}^{-1}[F(k)] \tag{6.7}$$

である。(6.5) を フーリエ変換、(6.6) をフーリエ逆変換 という。2π をどこにどの様につけるかはいろいろな流儀があり、上の他に (6.5) で係数を $1/\sqrt{2\pi}$ として、そのかわりに (6.6) の積分にも係数 $1/\sqrt{2\pi}$ を付けることもある。ここでは (6.5)(6.6) のようにしておく。

例題 6.1 次の関数のフーリエ変換を求め、そののちフーリエ逆変換によりもとの関数に戻ることを確かめよ。

(1) $\exp(-a|x|)$, $a>0$

(2) $\exp(-\frac{1}{2}a^2x^2)$

(3) $\frac{d}{dx}f(x)$, ただし $f(x)$ は連続でかつ $|x|\to\infty$ とした時任意の N に対して $|x|^{-N}$ より早く 0 となる。

(6.8)

解. 次の様に計算できる。

(1)

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dxe^{-a|x|}e^{-ikx} = \frac{1}{2\pi}\{\int_0^{\infty} dxe^{-(a+ik)x} + \int_{-\infty}^{0} dxe^{(a-ik)x}\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\{\frac{1}{a+ik}+\frac{1}{a-ik}\} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{a}{(a^2+k^2)}, \end{aligned} \tag{6.9}$$

フーリエ逆変換を求めるには

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dke^{ikx}F(k) = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{a^2+k^2}dk \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} dke^{ikx}\{\frac{1}{k-ia}-\frac{1}{k+ia}\} \end{aligned} \tag{6.10}$$

を計算する。複素 k 平面で考えて、 $x>0$ の時には上半平面で、$x<0$ の時には下半平面でこの積分路を閉じても、積分の値は変わらない (第 5 章付録を参照)。それぞれの場合に寄与する極は ia または $-ia$ である。積分路は複素 k平面上で kの偏角の増す正の方向 $(x>0)$ または偏角が減る負の方向 $(x<0)$ にまわっている。したがって

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\times\left\{\begin{array}{ll}(+2\pi i)e^{-ax} & :x>0\\ -(-2\pi i)e^{ax} & :x<0\end{array}\right\}=e^{-a|x|}.$$

(2)

$$F(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dxe^{-\frac{1}{2}a^2x^2-ikx}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dxe^{-\frac{1}{2}a^2(x+\frac{ik}{a^2})^2-\frac{k^2}{2a^2}} \tag{6.11}$$

この積分を実行するために、複素平面上で図 6.1 のような積分路 C を考えよう。閉じた積分路で囲まれた領域内に極はないから

$$\begin{aligned}\oint_C dze^{-\frac{1}{2}a^2z^2} &= \int_{-R}^{R}dxe^{-\frac{1}{2}a^2x^2}+i\int_0^{\frac{k}{a^2}}dye^{-\frac{1}{2}a^2(R+iy)^2}\\ &+ \int_{R}^{-R}dxe^{-\frac{1}{2}a^2(x+\frac{ik}{a^2})^2}+i\int_{\frac{k}{a^2}}^{0}dye^{-\frac{1}{2}a^2(-R+iy)^2}\\ &= 0\end{aligned}$$

である。ここで $R\to\infty$ の極限を考えると、右辺第 2,4 項は一様に 0 となる。したがって

$$\int_{-\infty}^{\infty}dxe^{-\frac{1}{2}a^2x^2}+\int_{\infty}^{-\infty}dxe^{-\frac{1}{2}a^2(x+\frac{ik}{a^2})^2}=0$$

である。第 1 項のガウス積分は

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{\infty}dxe^{-\frac{1}{2}a^2x^2}\right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dxdye^{-\frac{1}{2}a^2(x^2+y^2)}=2\pi\int_0^{\infty}drre^{-\frac{1}{2}a^2r^2}\\ &= \pi\int_0^{\infty}dte^{-\frac{1}{2}a^2t}=\frac{2\pi}{a^2}\end{aligned}$$

より

$$\int_{-\infty}^{\infty}dxe^{-\frac{1}{2}a^2x^2}=\frac{\sqrt{2\pi}}{a}$$

である。したがって

$$\int_{-\infty}^{\infty}dxe^{-\frac{1}{2}a^2(x+\frac{ik}{a^2})^2}=\frac{\sqrt{2\pi}}{a}$$

である。これを (6.11) に代入してフーリエ変換は

$$F(k)=\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{k^2}{2a^2}) \tag{6.12}$$

となる。すなわち、ガウス関数のフーリエ変換はガウス関数であることが分かる。フーリエ逆変換は全く同様に行うことができ、元に戻ることが示される。

//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//図 6.1//////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////

(3)

$$F(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x) \tag{6.13}$$

と定義しておく。部分積分を用いて

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx}\frac{df(x)}{dx} &= \frac{1}{2\pi}[e^{ikx}f(x)]_{x=-\infty}^{x=\infty} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{de^{-ikx}}{dx} f(x) \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx(-ik)e^{-ikx} f(x) \\ &= ik\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x) = ikF(k). \end{aligned} \tag{6.14}$$

を得る。また逆変換は

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} ikF(k) = \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} F(k) = \frac{d}{dx} f(x) \tag{6.15}$$

である。$ixf(x)$ のフーリエ変換に関しても

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} ixf(x) &= -\frac{d}{dk}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x) \\ &= -\frac{d}{dk}F(k) \end{aligned} \tag{6.16}$$

となる。これらの結果を用いると、微分方程式をフーリエ変換で容易に解けることがある。(例題 6.4 を参照) ■

例題 6.1(3) の結果を少し一般的に書くと次の様な重要な結果になる。

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f^{(n)}(x) = (ik)^n \mathcal{F}[f(x)], \tag{6.17}$$

$$\mathcal{F}[x^n f(x)] = (i\frac{d}{dk})^n \mathcal{F}[f(x)]. \tag{6.18}$$

これらは (6.14) の部分積分、あるいは (6.16) を n 回繰り返せば導くことができる。

「デルタ関数のフーリエ変換」とその逆変換を考えよう。デルタ関数 $\delta(x-x_0)$ のフーリエ変換は、定義に従って

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\delta(x-x_0)] &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dx e^{-ikx}\delta_n(x-x_0) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dx e^{-ikx}e^{-n(x-x_0)^2} \\
&= \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\frac{1}{2\pi}e^{-ikx_0}\int_{-\infty}^{\infty}dx e^{-ik(x-x_0)}e^{-n(x-x_0)^2} \\
&= \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\frac{1}{2\pi}e^{-ikx_0}\int_{-\infty}^{\infty}dx e^{-ikx-nx^2}
\end{aligned}$$

と変形される。この積分は (6.11) と同じ様に計算される。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dx e^{-ikx}\delta_n(x-x_0) = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-ikx_0}\frac{1}{2\sqrt{\pi n}}e^{-\frac{k^2}{4n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-ikx_0}e^{-\frac{k^2}{4n}} = \frac{e^{-ikx_0}}{2\pi}. \tag{6.19}$$

したがって

$$\mathcal{F}[\delta(x-x_0)] = \frac{1}{2\pi}\exp(-ikx_0). \tag{6.20}$$

さらに、ここで $x_0 = 0$ とすると

$$\mathcal{F}[\delta(x)] = \frac{1}{2\pi} \tag{6.21}$$

である。これらをフーリエ逆変換すれば$\delta(x-x_0)$, あるいは $\delta(x)$ にもどるはずである。式で書くと

$$\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{2\pi}] = \int_{-\infty}^{\infty}dk\frac{1}{2\pi}e^{ikx} = \delta(x) \tag{6.22}$$

となる。これもデルタ関数の別の表式である。しかしこの積分は、普通の積分の概念から考えれば、うさんくさいところがある。e^{ikx} は $|k|\to\infty$ で 0 になる関数ではないからである。

実は (6.20) (6.21) が超関数の意味で定義されているように, (6.22) も超関数“ 1 ”に関するものとして理解されなくてはならない。この超関数“ 1 ”を $I(x)$ と書いて 、(6.21) の右辺 $1/2\pi$ は超関数 $I(x)$ の $1/2\pi$ 倍とみなすことにする。超関数 $I(x)$ は

$$I_n(x) = \exp(-x^2/n) \tag{6.23}$$

の極限として

$$I(x) = \lim_{n\to\infty}e^{-x^2/n} \tag{6.24}$$

と定義すればよい。(6.19) の計算の途中はまさにそうなっている。$I(x)$ あるいは $I_n(x)$ との積として積分の中にあらわれる関数は、性格の良い、$|x|\to\infty$ では任意の N について

$|x|^{-N}$ より速く 0 になる関数 $f(x)$ であると考えているからである。この時、超関数 $I(x)$ は 1 と" ほとんど同じ "である。こう考えておけば $I(x)$ のフーリエ変換は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx I(x)e^{-ikx} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx I_n(x)e^{-ikx} \\ = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{nk^2}{4}} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-nk^2} = \delta(k) \qquad (6.25)\end{aligned}$$

と計算できる。(6.25) と (6.22) は $x \to k, k \to -x$ と置きかえただけで完全に同じ式である。以上によってデルタ関数と" 1 "は互いにフーリエ変換、フーリエ逆変換でむすびついていることが分かった。このことは物理的に言えば容易に理解できる。すなわち、広がった平面波をスペクトル分解すれば単一の波であるが、一方空間的に狭い領域にだけ強度を持った波をフーリエ分解すると、すべての波長の波を重ねなくてはならない、ということである。

ここでやったように、一般に $|x| \to \infty$ で急激に 0 にならない関数についても、それを超関数とみなして $|x| \to \infty$ で急激に 0 になる関数の極限と考えることで、フーリエ変換を定義できる。しかし、そのかわり充分遠方でその超関数の" 値 "が、元の関数の値と一致しているかどうか議論することの意味はなくなる。このことを上で、" ほとんど同じ "といった。超関数は線形汎関数として定義されているからである。

例題 6.2 たたみ込み (合成績)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy f(x-y)g(y) \qquad (6.26)$$

をフーリエ変換せよ。またそれを逆変換して元に戻ることを確かめよ。

解.

$$\mathcal{F}[f(x)] = F(k),\ \mathcal{F}[g(x)] = G(k) \qquad (6.27)$$

と定義しておく。

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}[\int_{-\infty}^{\infty} dy f(x-y)g(y)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx}\int_{-\infty}^{\infty} dy f(x-y)g(y) \\ &= 2\pi\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-ikt}f(t)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-iky}g(y) = 2\pi F(k)G(k).\end{aligned} \qquad (6.28)$$

これを逆変換すると

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[2\pi F(k)G(k)] &= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx}F(k)G(k) \\ &= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} dk_1\int_{-\infty}^{\infty} dk_2\delta(k_1-k_2)e^{ik_1x}F(k_1)G(k_2).\end{aligned}$$

ここで デルタ関数のフーリエ逆変換 (6.22) を用いて

$$\delta(k_1 - k_2) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{1}{2\pi} e^{-i(k_1-k_2)y} \tag{6.29}$$

を代入すると、

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}[2\pi F(k)G(k)] &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 e^{-i(k_1-k_2)y} e^{ik_1x} F(k_1)G(k_2) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 e^{ik_1(x-y)} F(k_1) \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 e^{ik_2y} G(k_2) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dy f(x-y)g(y) \qquad (6.30)
\end{aligned}$$

となり、元に戻る。このようにたたみ込みが積 $F(k)G(k)$ に変換されるため、積分方程式を解く時、フーリエ変換が有用であることがある。■

以上の例題6.1,6.2 で分かるように、フーリエ変換および逆変換を考える上で、$\delta(x), \delta'(x), I(x)$ などの超関数の概念が重要である。ヘビサイド関数 $H(x)$

$$H(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ 1 & : x \geq 0 \end{cases} \tag{6.31}$$

も同様に超関数として理解することができる。

例題 6.3 ヘビサイド関数 $H(x)$ は、超関数の意味で

$$\frac{d}{dx} H(x) = \delta(x) \tag{6.32}$$

と定義できることを示せ。

解. $|x| \to \infty$ で充分早く 0 になる関数 $f(x)$ を考える。

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dH(x)}{dx} f(x)dx = [H(x)f(x)]_{x=-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} H(x)f'(x)dx \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} H(x)f'(x)dx = -\int_{0}^{\infty} f'(x)dx = -[f(x)]_{x=0}^{\infty} \\
&= f(0) \qquad (6.33)
\end{aligned}$$

となる。これは (6.32) を示している。■

フーリエ変換を用いて、微分方程式を解いてみよう。

例題 6.4 次の方程式を解け。

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) - f(x) = e^{-|x|} \tag{6.34}$$

解.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f''(x)] &= -k^2\mathcal{F}[f] = -k^2 F(k)\ ,\\ \mathcal{F}[e^{-|x|}] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}e^{-|x|}dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\{\int_0^{\infty} e^{-ikx-x}dx + \int_{-\infty}^{0} e^{-ikx+x}dx\} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+k^2}.\end{aligned}$$

これから

$$F(k) = -\frac{1}{\pi}\frac{1}{(k^2+1)^2}.$$

故に

$$f(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx}\frac{1}{(1+k^2)^2}.$$

被積分関数は $k=\pm i$ を 2 位の極として持つ。$x>0$ の場合には積分路を複素 k 平面上の上半平面で閉じ、また $x<0$ の場合には下半平面で閉じる。したがって

$$\begin{aligned}x>0 \quad &: \quad f(x) = -\frac{1}{\pi}2\pi i[\frac{d}{dk}\frac{e^{ikx}}{(i+k)^2}]_{k=i} = -\frac{1+x}{2}e^{-x},\\ x<0 \quad &: \quad f(x) = -\frac{1}{\pi}2\pi i(-1)[\frac{d}{dk}\frac{e^{ikx}}{(-i+k)^2}]_{k=-i} = -\frac{1-x}{2}e^{x}\end{aligned}$$

である。まとめて

$$f(x) = -\frac{1+|x|}{2}e^{-|x|} \tag{6.35}$$

となる。■

ここで、いくつかの関数のフーリエ変換を表の形で与えておこう。

表 6.1　フーリエ変換の表

$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx}F(k)$	$F(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)e^{-ikx}$
1	$\delta(k)$
$x^n f(x)$	$(i\frac{d}{dk})^n F(k)$
$\frac{1}{\lvert x\rvert^{\nu}}, (x\neq 0, 0<\nu<1)$	$\frac{1}{\pi}\sin(\frac{\nu\pi}{2})\frac{\Gamma(1-\nu)}{\lvert k\rvert^{1-\nu}}$
$\frac{1}{x^2+a^2}, (a>0)$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}\exp(-a\lvert k\rvert)$
$e^{-ax^2}, (a>0)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\exp(-\frac{k^2}{4a})$
$\mathrm{sech}\, ax, (a>0)$	$\frac{1}{2a}\mathrm{sech}(-\frac{\pi k}{2a})$
$\frac{\sin ax}{x}, (a>0)$	$\begin{cases}\frac{1}{2} & \lvert k\rvert<a\\ 0 & \lvert k\rvert>a\end{cases}$
$\sin(a^2x^2), (a>0)$	$\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\cos(\frac{k^2}{4a^2}+\frac{\pi}{4})$

例題 6.5 1 次元の熱伝導を $-\infty<x<\infty$ の領域で考えよう。時刻 $t=0$ に $x=\xi$ の位置に強さ 1 の点熱源を置いたとき、この系は方程式

$$(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial^2}{\partial x^2})u(x,t) = \delta(x-\xi)\delta(t) \tag{6.36}$$

により表される。(6.36) を、初期条件

$$u(x,t)=0 \quad , \; t<0 \tag{6.37}$$

のもとで解け。

解.(6.36) を x および t についてフーリエ変換し、

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}dwe^{ik(x-\xi)}e^{-i\omega t}\tilde{u}_{\xi}(k,\omega) \tag{6.38}$$

と書く。さらに点熱源を表す (6.36) の右辺をフーリエ変換すると

$$\delta(x-\xi)\delta(t)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}d\omega e^{ik(x-\xi)}e^{-i\omega t}. \tag{6.39}$$

これらを (6.36) に代入して整理すると

$$\tilde{u}_{\xi}(k,\omega)=\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{-i\omega+ak^2} \tag{6.40}$$

となる。k を実数とした時、(6.40) は複素 ω 平面上で、$Im\ \omega>0$ の領域で正則である (極は $\omega=-iak^2$)。(6.40) をフーリエ逆変換して、$u(x,t)$ は (6.38) で与えられる。この時、ω についての積分は $e^{-i\omega t}$ の因子により、$t>0$ の時は複素 ω 平面上の下半平面で、$t<0$ の時は上半平面で閉じなくてはならない (図 6.2)。極は ω 平面の下半平面上 $-iak^2$ にあるから、$t<0$ の場合には積分路のかこむ領域内に極はなく、積分の結果は 0 となる。

$$u(x,t)=0\ :\ t<0. \tag{6.41}$$

$t>0$ の場合には ω -下半平面上の極 $-iak^2$ からの寄与を計算して、積分路は負の方向にまわっているから

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}d\omega e^{ik(x-\xi)}e^{-i\omega t}\frac{1}{-i\omega+ak^2}\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dke^{ik(x-\xi)}e^{-ak^2t}\end{aligned}$$

となる。この積分は今まで何度かでてきたもので、(6.11) と同じ様に実行できる。

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dke^{-at(k-i\frac{x-\xi}{2at})^2}e^{-(x-\xi)^2/4at}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi at}}\exp\{-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\}\equiv G(x-\xi,t),\ t>0 \end{aligned} \tag{6.42}$$

$t\to 0$ の極限では、これはデルタ関数の定義そのままであるから

$$\lim_{t\to 0}G(x-\xi,t)=\delta(x-\xi) \tag{6.43}$$

となり、たしかに点熱源であることも理解できる。この解 (6.42) を 1 次元熱伝導方程式の「基本解」という。■

//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//図 6.2//////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////

一般に無限の長さの 1 次元熱伝導方程式で、初期条件として $t=0$ で熱分布 $f(x)$ を与えた時、任意の時刻での熱分布は

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad , \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases} \tag{6.44}$$

に従う。この方程式の解は基本解を用いて

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi G(x-\xi,t) f(\xi) \tag{6.45}$$

で与えられる。$f(x)$ を点熱源が連続的に分布しているものと見なせば、(6.45) はそれらの解を重ね合わせたものと理解することができる。(6.45) を直接示そう。(6.45) を (6.44) 第 1 式に代入すると

$$\begin{aligned} (\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial^2}{\partial x^2})u &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi f(\xi)(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial^2}{\partial x^2})G(x-\xi,t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi f(\xi)\delta(x-\xi)\delta(t) = f(x)\delta(t) \end{aligned} \tag{6.46}$$

となる。ここでは $G(x-\xi,t)$ が (6.36) の解であることを用いた。したがって $u(t)$ は $t \neq 0$ で (6.44) の第 1 式を満たす。$t \to 0$ では (6.43) により

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi f(\xi) \lim_{t\to 0} G(x-\xi,t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi f(\xi)\delta(x-\xi) = f(x) \tag{6.47}$$

となり、$u(x,t)$ は (6.44) の第 2 式を満たすことも示された。

6.2 ラプラス変換

フーリエ変換と同様にラプラス変換はしばしば用いられる積分変換の 1 つである。関数 $y(t)$ が次の性質を満足していると仮定する。

(1) $y(t) = 0\ ,\ t < 0$

$$(2) \quad \int_0^\infty dt e^{-\gamma t}|y(t)| < \infty \ , \ \gamma : \text{正の実数} \tag{6.48}$$

この時 $y(t)$ のフーリエ変換 $Y_F(\omega)$ を考え、さらに ω を複素領域に拡張する。

$$Y_F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}y(t)dt, \tag{6.49}$$

あるいは、$\omega = \omega_0 - i\gamma_0 \quad (\omega_0, \gamma_0 : \text{実数})$ とすると、

$$Y_F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_0 t}e^{-\gamma_0 t}y(t)dt. \tag{6.50}$$

ここで (6.50) の右辺が収束するならば、$Im\omega' < -\gamma_0$ である $\omega' = \omega_0 - i\gamma \quad (\gamma = -Im\omega')$ について

$$Y_F(\omega') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_0 t}e^{-\gamma t}y(t)dt$$

も収束する。これを改めて $Y_F(\omega)$ と書いて $(\omega = \omega_0 - i\gamma)$

$$Y_F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-i\omega t}y(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-i\omega_0 t}e^{-\gamma t}y(t)dt. \tag{6.51}$$

を出発点とする。(6.51) で $y(t) = 0 \ (t < 0)$ であるので、積分の下限を 0 と書いた。(6.51) の収束領域は $Im\omega = -\gamma < -\gamma_0$ である。また (6.51) のフーリエ逆変換は

$$y(t) = e^{\gamma t}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_0 e^{i\omega_0 t}Y_F(\omega) = \int_{-\infty - i\gamma}^{+\infty - i\gamma} d\omega e^{i\omega t}Y_F(\omega) \tag{6.52}$$

と書ける。$(\gamma > \gamma_0)$ 最後の積分路は複素 ω 平面上で実軸に平行に、$\omega = -\infty - i\gamma$ から $+\infty - i\gamma$ までの直線をとる。

上の式 (6.51),(6.52) で $i\omega = p$ とすると

$$Y_L(p) = 2\pi Y_F(\omega) = \int_0^\infty dt e^{-pt}y(t) \equiv \mathcal{L}[y(t)] \tag{6.53}$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} dp e^{pt}Y_L(p) \equiv \mathcal{L}^{-1}[Y_L(p)] \tag{6.54}$$

である。$p = i\omega$ という変換は複素 ω 平面上の図形を 90 度正の向きに回転させたものであるから複素 p 平面上での収束領域 ($Y_L(p)$ の正則領域) は図 6.3 のように虚軸にそった直線 $p = \gamma_0$ より右側の領域となる。積分路はこの直線 $p = \gamma_0$ である。(6.53) を $y(t)$ のラプラス変換、(6.54) をラプラスの逆変換という。複素 p 平面上で $Re\ p = \gamma_0$ より右側は $Y_L(p)$ の正則領域であるから、逆に $Y_L(p)$ を計算したあとで、その極を含む領域がすべて左側にくる様に γ_0 或いは γ を決める。そのような $\gamma(> \gamma_0)$ を選んで、ラプラス逆変換 (6.54) を行えばよい。

//////////////////////////////////

//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//図 6.3///////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////

例題によって、ラプラス変換の具体例をみよう。

例題 6.6 $\frac{df}{dx}$をラプラス変換せよ。

解.

$$F_L(p) = \mathcal{L}[f(x)] = \int_0^\infty dx e^{-px} f(x) \tag{6.55}$$

として、部分積分すると

$$\int_0^\infty dx e^{-px} f'(x) = e^{-px} f(x)\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty dx e^{-px} f(x) = -f(0) + pF_L(p)$$

となる。ただしここで境界条件 $f(\infty) = 0$ を用いた。したがって

$$\mathcal{L}[f'(x)] = -f(0) + pF_L(p) \tag{6.56}$$

を得る。■

例題 6.6 の結果を少し一般的に書くと

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(x)] = p^n F_L(p) - \sum_{r=0}^{n-1} p^{n-r-1} f^{(r)}(0) \tag{6.57}$$

である。

例題 6.7 たたみ込み（合成積）

$$\int_0^x d\xi f(\xi) g(x-\xi) \tag{6.58}$$

をラプラス変換せよ。

解.

$$\mathcal{L}[f(x)] = F_L(p), \quad \mathcal{L}[g(x)] = G_L(p) \tag{6.59}$$

とする。

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}[\int_0^x d\xi f(\xi) g(x-\xi)] \\
&= \int_0^\infty dx e^{-px} \int_0^x d\xi f(\xi) g(x-\xi) = \int_0^\infty dx \int_0^x d\xi e^{-p\xi} f(\xi) e^{-p(x-\xi)} g(x-\xi) \\
&= \int_0^\infty d\xi \int_\xi^\infty dx e^{-p\xi} f(\xi) e^{-p(x-\xi)} g(x-\xi) = \int_0^\infty d\xi e^{-p\xi} f(\xi) \int_0^\infty dy e^{-py} g(y) \\
&= F_L(p) G_L(p).
\end{aligned} \tag{6.60}$$

このようにたたみ込みが積 $F(k)G(k)$ に変換されるため、積分方程式を解く際にラプラス変換は有用である。■

例題 6.8 微分方程式

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dx^2} + u = f(x) \quad , \quad x \geq 0 \\ u(0) = u'(0) = 0 \end{cases} \tag{6.61}$$

をラプラス変換により解け。

解.$u(x)$ および $f(x)$ のラプラス変換を

$$u_L(p) = \int_0^\infty dx e^{-px} u(x) = \mathcal{L}[u(x)], \tag{6.62}$$

$$f_L(p) = \int_0^\infty dx e^{-px} f(x) = \mathcal{L}[f(x)] \tag{6.63}$$

と書く。$\frac{d^2u}{dx^2}$ のラプラス変換 $\mathcal{L}[u''(x)]$ を計算しよう。これは結果についてはすでに (6.57) で見た。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u''(x)] &= \int_0^\infty e^{-px} u''(x) dx \\ &= [e^{-px} u'(x)]_{x=0}^\infty - \int_0^\infty (-pe^{-px}) u'(x) dx \\ &= [e^{-px} u'(x)]_0^\infty + [pe^{-px} u(x)]_0^\infty - p \int_0^\infty (-pe^{-px}) u(x) dx \\ &= p^2 u_L(p) - pu(0) - u'(0) \end{aligned} \tag{6.64}$$

ここでは部分積分、および $e^{-px}u'(x), \quad e^{-px}u(x) \to 0 (x \to \infty)$ を用いた。

初期条件 $u(0) = u'(0) = 0$ より、(6.61) 第 1 式は

$$(p^2 + 1) u_L(p) = f_L(p)$$

すなわち

$$u_L(p) = \frac{f_L(p)}{p^2 + 1} \tag{6.65}$$

となる。

ラプラス変換のたたみ込み (6.60) を考えると、(6.65) のラプラス逆変換の結果は

$$u(x) = \int_0^x f(\xi) \{\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{p^2 + 1}]\}_{x-\xi} d\xi \tag{6.66}$$

であることが分かる。添字 $x - \xi$ はラプラス逆変換した関数の変数を示している。ここで $1/(p^2 + 1)$ のラプラス逆変換を求める必要がある。

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{p^2 + 1}] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} dp e^{px} \frac{1}{p^2 + 1}. \tag{6.67}$$

$1/(p^2+1)$ は 1 位の極を $p = \pm i$ にもっている。この被積分関数で、γ が任意の正の数であれば、直線 $Rep = \gamma$ より右側は正則な領域である。p の積分路は図 6.4 のように左側で閉じても、その値は変わらないはずである。したがって γは任意の正の数としてよい。積分路は正の方向にまわっているから

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{p^2+1}] &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} dp(\frac{1}{p+i}-\frac{1}{p-i})e^{px}(-\frac{1}{2i}) \\ &= -\frac{1}{2i}[e^{-ix}-e^{+ix}] = \sin x \qquad (6.68)\end{aligned}$$

となる。これを (6.66) に代入して、最終的に

$$u(x) = \int_0^x d\xi f(\xi)\sin(x-\xi) \qquad (6.69)$$

を得る。■

//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//図 6.4//////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////

ラプラス変換のいくつかを表にまとめておこう。

表 6.2　ラプラス変換の表

$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} dpe^{px}F_L(p)$	$F_L(p) = \int_0^\infty dxe^{-px}f(x)$	γ
$\theta(x-a) = \begin{cases} 1 & : x > a > 0 \\ 0 & : x < a \end{cases}$	$\frac{e^{-pa}}{p}$	0
$x^\nu \qquad \nu > -1$	$\frac{\Gamma(1+\nu)}{p^{\nu+1}}$	0
e^{ax}	$\frac{1}{p-a}$	a
$\sin ax$	$\frac{a}{p^2+a^2}$	0
$\cos ax$	$\frac{p}{p^2+a^2}$	0
$\mathrm{sinh}a$	$\frac{a}{p^2-a^2}$	$\lvert a\rvert$
$\mathrm{cosh}a$	$\frac{p}{p^2-a^2}$	$\lvert a\rvert$

6.3　離散フーリエ変換と高速フーリエ変換

フーリエ変換は連続変数による積分変換であるが、実際に数値的に取り扱う際には、離散的変数値を用いた有限項の和に置きかえる必要がある。

関数 $f(x)$ は区分的に滑らか (孤立した点以外では滑らか) で連続であり、周期 $2a$ の周期関数とする。$[0,2a]$ を基本の区間としよう。この様な周期関数の複素フーリエ級数展開は

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{a}} \\ c_n &= \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x) e^{-i\frac{n\pi x}{a}} dx \end{aligned} \tag{6.70}$$

と表される。区間 $[0,2a]$ を N 等分

$$\begin{aligned} 0 &= x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{N-1} < x_N = 2a, \\ x_k &= \frac{2ak}{N}; k = 0,1,\ldots,N-1 \end{aligned} \tag{6.71}$$

して、この分点上の和によって、(6.70) の第 2 式の積分を置き換える。

$$c_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(\frac{2ak}{N}) e^{-i\frac{2nk\pi}{N}} \tag{6.72}$$

あるいは、

$$\begin{aligned} \omega &= \exp\frac{2\pi i}{N}, \\ f_k &= f(x_k), k = 0,1,2\ldots,N-1 \\ c_n &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k(\bar{\omega})^{nk}, n = 0,1,2,\ldots,N-1 \end{aligned} \tag{6.73}$$

と書ける。$\{f_0, f_1, \ldots f_{N-1}\}$ から $\{c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}\}$ への変換を <u>離散フーリエ変換</u> という。この逆変換 (<u>離散フーリエ逆変換</u>) は、(6.70) 第 1 式より

$$f_k = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \omega^{nk} \qquad (k = 0,1,2,\ldots,N-1) \tag{6.74}$$

となる。(6.73) の定義により

$$\sum_{n=0}^{N-1} c_n\omega^{nk} = \frac{1}{N}\sum_{k'=0}^{N-1} f_{k'} \sum_{n=0}^{N-1}\omega^{n(k-k')} = \frac{1}{N}\sum_{\substack{k'=0 \\ (k'\neq k)}}^{N-1} f_{k'}\frac{1-\omega^{N(k-k')}}{1-\omega^{(k-k')}} + f_k$$

となるが、ω は 1 の N 乗根 $(\omega^N = 1)$ であるから右辺第 1 項は 0 となる。これにより (6.74) を直接たしかめることができた。

離散フーリエ (逆) 変換は (6.73) を直接この式に従って計算すると n と kはともに 0 から $N-1$ まで動くから、N^2 回に比例する乗・加算が必要である (正しくは乗算 N^2 回、加算 $N(N-2)$ 回)。このため N の増加にともなう計算の手間の増加は急激で、N が 300 程

度になると実用上無視できない問題となる。効率よく計算を行うという点から、高速フーリエ変換 (FFT=Fast Fourier Transform) という有効な計算アルゴリズムがある。

FFT では$\omega^N=1$ に注目して計算する量を減らすことが本質的である。通常は $N=2^p$ に選ぶ。簡単のために $p=2(N=2^2)$ として説明しよう。(6.73) は、$(\bar{\omega})^4=1$ に注意すれば、

$$
\begin{aligned}
4c_0 &= f_0(\bar{\omega})^0+f_1(\bar{\omega})^0+f_2(\bar{\omega})^0+f_3(\bar{\omega})^0, \\
4c_1 &= f_0(\bar{\omega})^0+f_1(\bar{\omega})^1+f_2(\bar{\omega})^2+f_3(\bar{\omega})^3, \\
4c_2 &= f_0(\bar{\omega})^0+f_1(\bar{\omega})^2+f_2(\bar{\omega})^0+f_3(\bar{\omega})^2, \\
4c_3 &= f_0(\bar{\omega})^0+f_1(\bar{\omega})^3+f_2(\bar{\omega})^2+f_3(\bar{\omega})^1,
\end{aligned}
\tag{6.75}
$$

と書き改められる。よく観察するとさらに次の各項にまとめられる（第 1 段階)。

$$
\begin{aligned}
f^{(0)}(0,0) &= f_0, \\
f^{(0)}(0,1) &= f_1, \\
f^{(0)}(1,0) &= f_2, \\
f^{(0)}(1,1) &= f_3.
\end{aligned}
\tag{6.76}
$$

$f^{(0)}(k_1,k_0)$ の括弧の中は、f_kの添字 kを 2 進数表示したもの $k=2k_1+k_0$である;

$$
f^{(0)}(k_1,k_0)=f_k, \quad k=2k_1+k_0. \tag{6.77}
$$

もし $p>2$ なら $f^{(0)}(\cdots)$ の括弧内には p 個の 0 または 1 が入る。第 2 段階は次式である。

$$
\begin{aligned}
f^{(1)}(0,0) &= f^{(0)}(0,0)(\bar{\omega})^0+f^{(0)}(1,0)(\bar{\omega})^0 \\
f^{(1)}(1,0) &= f^{(0)}(0,0)(\bar{\omega})^0+f^{(0)}(1,0)(\bar{\omega})^2 \\
f^{(1)}(0,1) &= f^{(0)}(0,1)(\bar{\omega})^0+f^{(0)}(1,1)(\bar{\omega})^0 \\
f^{(1)}(1,1) &= f^{(0)}(0,1)(\bar{\omega})^0+f^{(0)}(1,1)(\bar{\omega})^2
\end{aligned}
\tag{6.78}
$$

この各項は $f^{(0)}(k_1,k_0)$ について $k_1=0,1$ の和を行っている;

$$
f^{(1)}(n_0,k_0)=f^{(0)}(0,k_0)(\bar{\omega})^0+f^{(0)}(1,k_0)(\bar{\omega})^{2n_0}. \tag{6.79}
$$

第 3 段階では $f^{(1)}(n_0,k_0)$ について $k_0=0,1$ の和を行う。

$$
\begin{aligned}
4c_0 &= f^{(2)}(0,0)=f^{(1)}(0,0)(\bar{\omega})^0+f^{(1)}(0,1)(\bar{\omega})^0 \\
4c_1 &= f^{(2)}(1,0)=f^{(1)}(1,0)(\bar{\omega})^0+f^{(1)}(1,1)(\bar{\omega})^1 \\
4c_2 &= f^{(2)}(0,1)=f^{(1)}(0,0)(\bar{\omega})^0+f^{(1)}(0,1)(\bar{\omega})^2 \\
4c_3 &= f^{(2)}(1,1)=f^{(1)}(1,0)(\bar{\omega})^0+f^{(1)}(1,1)(\bar{\omega})^3
\end{aligned}
\tag{6.80}
$$

ここでは $c_n \quad (n=2n_1+n_0)$ が $f^{(2)}(n_0,n_1)$ となっている;

$$2^2 c_{2n_1+n_0} = f^{(2)}(n_0,n_1) = f^{(1)}(n_0,0)(\bar{\omega})^0 + f^{(1)}(n_0,1)(\bar{\omega})^{2n_1+n_0}. \tag{6.81}$$

この計算は、(6.78) (6.80) とも右辺第 1 項は $(\bar{\omega})^0=1$ であり、乗算は第 2 項に関してのみ $N=4$ 回、加算も $N=4$ 回行なう。これが (6.78) (6.80) で $p=2$ 回繰り返されるから、結局乗算、加算とも $8=4\times 2=Np$ 回となる。

一般の $N=2^p$ の場合には、k,n を 2 進数表示により

$$\begin{aligned} k &= 2^{p-1}k_{p-1}+2^{p-2}k_{p-2}+\ldots+2k_1+k_0 \\ n &= 2^{p-1}n_{p-1}+2^{p-2}n_{p-2}+\ldots+2n_1+n_0 \end{aligned}$$

と表し、

$$f^{(0)}(k_{p-1},k_{p-2},\ldots,k_0) = f_k \tag{6.82}$$

$$f^{(p)}(n_0,n_1,\ldots,n_{p-1}) = Nc_n \tag{6.83}$$

を定義する。$(\bar{\omega})^{nk}$のベキ指数 nkを

$$\begin{aligned} nk &= n\cdot 2^{p-1}k_{p-1}+n\cdot 2^{p-2}k_{p-2}+\cdots\cdots+n\cdot k_0 \\ &= 2^{p-1}n_0k_{p-1}+2^{p-2}(2n_1+n_0)k_{p-2}+\cdots\cdots \\ &\qquad +(2^{p-1}n_{p-1}+2^{p-2}n_{p-2}+\cdots\cdots+n_0)k_0 \ : \quad (mod\ 2^p) \end{aligned} \tag{6.84}$$

と書き換えてこれに注意すると

$$\begin{aligned} & f^{(p)}(n_0,n_1,\cdots\cdots,n_{p-1}) \\ &= \sum_{k_0}\Big(\sum_{k_1}\Big(\cdots\Big(\sum_{k_{p-1}} f^{(0)}(k_{p-1},k_{p-2},\cdots,k_0)(\bar{\omega})^{2^{p-1}n_0k_{p-1}}\Big)(\bar{\omega})^{2^{p-2}(2n_1+n_0)k_{p-2}}\Big)\cdots\cdots\cdots\Big) \\ &\qquad\qquad \times(\bar{\omega})^{(2^{p-1}n_{p-1}+2^{p-2}n_{p-2}+\cdots+n_0)k_0}\Big) \end{aligned} \tag{6.85}$$

を得る。(6.84) で $mod(2^p=N)$ としたのは$\bar{\omega}^N=1$ により（6.85）内では 2^N の整数倍は意味を持たないからである。(6.85) について式 (6.76)~(6.80) と同じように第 1 段階は $k_{p-1}=0,1$ の和、第 2 段階は $k_{p-2}=0,1$ の和という具合に実行していく。第 p 段階目に $c_n(n=0,1,2\ldots,N-1)$ が求められる。この方法では乗算・加算とも $Np=N\log_2 N$ 回となる。

FFT はフーリエ変換の計算だけでなく、たたみ込み $h_n=\sum_{m=0}^{N-1}f_mg_{n-m}$ の計算効率の向上をめざすことにもしばしば用いられる。