Chapter 5

フーリエ級数と固有関数展開

5.1 フーリエ級数

$[-a,a]$ を周期とする関数 $f(x)$ を 3 角関数の級数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{a}+b_n\sin\frac{n\pi x}{a}) \tag{5.1}$$

と表せたとする。この展開 (5.1) をフーリエ級数展開という。ここで係数 $a_0,a_1,\ldots,b_1,b_2,\ldots$ はどう決めればよいか、またこの級数の収束に付いての性質を議論する事がこれからの主題である。

$n,m>0$ であるとき 3 角関数には

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}dx &= \begin{cases}0 & : n\neq m\\ a & : n=m\end{cases}\\
\int_{-a}^{a}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi x}{a}dx &= \begin{cases}0 & : n\neq m\\ a & : n=m\end{cases}\\
\int_{-a}^{a}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi x}{a}dx &= 0
\end{aligned} \tag{5.2}$$

の関係がある。したがって (5.1) の展開が<u>可能ならば</u>、(5.1) に 3 角関数をかけて積分することにより、展開係数 a_n,b_n は次の様に定められる。

$$a_n=\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}dx \quad , \quad n=0,1,2,\ldots \tag{5.3}$$

$$b_n=\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx \quad , \quad n=1,2,3\ldots. \tag{5.4}$$

ここでは無限級数の一様収束性を仮定して、項別積分を行った。関係 (5.2) を 3 角関数の直交関係という。また、直交関係を満たす関数系を直交関数系と呼ぶ。簡単な例題を考えよう。

例題 5.1 $-\pi < x < \pi$ 上の関数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \ -\pi < x \leq 0 \\ x & : \ 0 < x < \pi \end{cases} \tag{5.5}$$

をフーリエ級数に展開せよ。

解. フーリエ級数の係数は (5.3) (5.4) により次のように計算できる。

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x dx = \frac{\pi}{2} \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x \cos nx dx = \frac{1}{n\pi}[x \sin nx]_0^\pi - \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \sin nx dx \\ &= \frac{1}{n^2\pi}[(-1)^n - 1] \ \ , \ n = 1, 2 \ldots \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x \sin nx dx = -\frac{1}{n\pi}[x \cos nx]_0^\pi + \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \cos nx dx \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n} \ \ , \ n = 1, 2 \ldots \end{aligned} \tag{5.6}$$

したがって

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx] \tag{5.7}$$

である。■

上で得られた (5.7) から無限級数の和$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}$ を求めることもできる。(5.7) で $x = 0$ とおくと

$$0 = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}$$

となる。これを整理すれば

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \tag{5.8}$$

を得る。

第 3 章では、境界条件

$$u(0) = u(a) = 0$$

を満たす関数 $u(x)$（定義域 $0 < x < a$）を 3 角関数 $\sin\frac{n\pi x}{a}$ を用いて

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{a} \tag{5.9}$$

と展開した。(5.9) では領域 $[0, a]$ のみを考え、かつ上の境界条件がかせられていた。これを拡張し、$-a < x < 0$ に対して奇関数

$$u(-x) = -u(x), -a < x < 0$$

と定義するしよう。奇関数 $u(x)$ を展開したのだから (5.9) には (5.1) のうち奇関数成分のみが現れたと理解できる。一方、関数 $f(x)$ を偶関数として $-a < x < 0$ に拡張すれば

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{a} \tag{5.10}$$

と展開できる。(5.9) (5.10) をそれぞれフーリエ・サイン展開、フーリエ・コサイン展開という。

例題 5.1 では、定義域 $(-\pi < x < \pi)$ で連続な関数を考えた。それでは、不連続な関数はどうだろう。

例題 5.2 関数

$$f(x) = \begin{cases} -1 & : \ -\pi < x \le 0 \\ 1 & : \ 0 < x < \pi \end{cases} \tag{5.11}$$

をフーリエ級数に展開せよ。

解. この関数は、x の奇関数だから sin 成分しかあらわれないはずである。実際、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}[\int_0^{\pi} \cos nx dx - \int_{-\pi}^{0} \cos nx dx] = 0, \quad n = 0, 1, 2 \ldots \\ b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{5.12}$$

と計算できる。したがって

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} \tag{5.13}$$

となる。ここで、右辺で $x = 0$ とすると 0 となるが、(5.11) では $f(0) = -1$ であるから等号は成り立たないことに注意しなくてはならない。(5.13) の右辺は 0 であり、$\frac{1}{2}\{f(0_+)+f(0_-)\}$ に等しい。■

上で見たように、一般に、孤立した不連続点 $x = c$ があるときには、フーリエ級数の和は $x = c$ で

$$\frac{1}{2}\{f(c+0) + f(c-0)\} \tag{5.14}$$

の値をとる。(この事は後で一般的に示す。) したがって常に (5.1) の様な等号が成立するわけではない。そこでよく (5.1) の代わりに

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{a} + b_n \sin\frac{n\pi x}{a}) \tag{5.15}$$

という書き方をする。図 5.1 に (5.13) の部分和

$$S_N(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} \tag{5.16}$$

を描こう。$x = 0$ および $x = \pm 1$ 近傍での振る舞いに注意してほしい。この部分和の収束性については後で議論することになる。

///////////////////////////////////
///////////////////////////////////
///////////////////////////////////
///////////////////////////////////
//図 5.1////////////////////////////
///////////////////////////////////
///////////////////////////////////
///////////////////////////////////
///////////////////////////////////

フーリエ級数を $\sin, \cos$ を用いないで、指数関数を用いて表すこともできる。

$$\begin{aligned} \sin\frac{n\pi x}{a} &= \frac{1}{2i}\{\exp(i\frac{n\pi x}{a}) - \exp(-i\frac{n\pi x}{a})\} \\ \cos\frac{n\pi x}{a} &= \frac{1}{2}\{\exp(i\frac{n\pi x}{a}) + \exp(-i\frac{n\pi x}{a})\} \end{aligned} \tag{5.17}$$

であるから、これを (5.15) に代入し

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{i\frac{n\pi x}{a}} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-i\frac{n\pi x}{a}}\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(i\frac{n\pi x}{a}) \end{aligned} \tag{5.18}$$

と書くと、係数 c_n は (0 および正または負の整数 n について)

$$c_n = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x)\exp(-i\frac{n\pi x}{a})dx, (n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots) \tag{5.19}$$

と定められる。ここでは指数関数の直交関係

$$\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\exp(-i\frac{n\pi x}{a})\exp(i\frac{m\pi x}{a})dx = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & : n \neq m \\ 1 & : n = m \end{array} \right. \tag{5.20}$$

を用いればよい。展開 (5.18) を複素フーリエ級数と呼ぶ。a_n, b_n と c_n の関数は

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2}, \\ c_m &= \frac{1}{2}(a_m - ib_m),\ m > 0 \\ c_m &= (c_{-m})^*,\ m < 0 \end{aligned} \tag{5.21}$$

である。

5.2 デルタ関数

フーリエ級数を議論する時に、デルタ関数（ディラックのデルタ関数）というものを使うと便利である。

物理学における質点の概念は、大きさはないが質量は有限であるものを云う。電子は、大きさはなく、有限の質量と電荷 (およびスピン) を持った質点である。ところが、古典数学の中にはこのような質点の密度分布を表現できる関数はない。 一点だけで有限な値を持ち、その他のすべての領域で 0 である関数 $m(x)$ を考えてみよう。

$$m(x) = \begin{cases} 1 & : x = 0 \\ 0 & : x \neq 0 \end{cases}$$

一見するとこのような関数は、上で述べた質点の概念に対応していると思えるかも知れないが、それは違う。上の $m(x)$ を $x=0$ を内部に含む空間内で積分を行うと 0 である。

$$\int_{-\infty}^{\infty} m(x)dx = 0.$$

しかし有限の質量を持つ質点を含む空間全体に含まれる質量はやはり有限である。したがって、質点の分布は上で考えたような関数 $m(x)$ の形では表せないことになる。P.A.M. ディラックは、量子力学の理論的枠組を作る中で、デルタ関数を導入した。デルタ関数は、普通の関数ではなく、超関数 (distribution) といわれる数学的枠組みの中に納められている。質点の質量分布もデルタ関数により表すことができる。以下でデルタ関数を説明しよう。

1 次元空間において、関数列 $\{\sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-nx^2}\}$ を考える。それぞれの関数

$$\delta_n(x) \equiv \sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-nx^2} \tag{5.22}$$

は、x の全域で無限回連続微分可能な関数であり、$-\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} < x < \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$ 程度の巾の中でのみ大きな値を持ち、その外では急激にゼロとなる。また、ガウス関数の積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-nx^2} = 1 \tag{5.23}$$

であるから、この関数の示す全面積は n によらずに 1 である。デルタ関数を、この関数の $n \to \infty$ の極限として

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-nx^2} \tag{5.24}$$

と定義する。したがってデルタ関数は面積 1, 巾が無限少で高さが無限大ということになる。$\delta_n(x)$ およびその微分を図 5.2 に示しておこう。

////////////////////////////////////

////////////////////////////////////

///////////////////////////////////
///////////////////////////////////
//図 5.2/////////////////////////////
///////////////////////////////////
///////////////////////////////////
///////////////////////////////////
///////////////////////////////////

関数 $f(x)$ を無限回連続微分可能で、かつ $|x| \to \infty$ にした時、任意の Nで定義される $|x|^{-N}$ より早く 0 になる関数 (急減少関数) であるとする。例えば $|x|$ の充分大きいところで $\exp(-x^2)$ の様に振る舞うと考えればよい。この時

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx \equiv \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_n(x)dx = f(0) \tag{5.25}$$

であることが示される。充分大きい n について、 $\delta_n(x)$ は $x = 0$ を中心とした非常にせまい範囲内でのみ 0 でない値をとる。したがって $f(x)$ は $x \simeq 0$ 付近での値だけが寄与して

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_n(x)dx \simeq f(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x)dx = f(0) \tag{5.26}$$

となるからである。あるいは、もう少し厳密な形で書くなら次のように示せばよい:

$$\begin{aligned}
& |\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-nx^2}f(x)dx - f(0)| \\
= \ & |\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-nx^2}\{f(x)-f(0)\}dx| \\
\leq \ & \mathrm{Max}|f^{(1)}(x)|\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-nx^2}|x|dx \\
= \ & \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\mathrm{Max}|f^{(1)}(x)| \to 0 : \quad (n\to\infty).
\end{aligned} \tag{5.27}$$

デルタ関数は数学的には (5.24) よりむしろ (5.25) の様に、関数 $f(x)$ から値 $f(0)$ への対応 として定義されている。このような関係を 線形汎関数 という。

デルタ関数の微分も同じように

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)dx \equiv \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_n'(x)dx \tag{5.28}$$

と定義する。右辺は部分積分により

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{d\delta_n(x)}{dx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{d}{dx}(\sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-nx^2})dx$$

$$= \ -\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-nx^2}dx \to -f'(0) : \quad (n\to\infty)$$

と計算される。ここでは　$f(x) \to 0 \ : |x| \to \infty$　を用いた。これにより、$\delta'(x)$ も超関数として定義され、形式的に部分積分によって

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x)dx = -f'(0) \tag{5.29}$$

と計算できることが分かる。デルタ関数は常に積分の中に現れることを念頭に置いておけば、あとは普通の関数のように微分や積分をしてかまわない。デルタ関数には以下の諸性質がある。

例題 5.3 デルタ関数 $\delta(x)$ の次の性質を示せ。

$$\begin{aligned} &(1) \quad \delta(-x) = \delta(x) \\ &(2) \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \end{aligned} \tag{5.30}$$

解.

(1)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(-x)dx &= \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_n(-x)dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_n(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx \end{aligned}$$

である。したがって$\delta(-x) = \delta(x)$ である。

(2)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(ax)dx &= \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_n(ax)dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-na^2x^2)dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\frac{y}{|a|})\exp(-ny^2)\frac{dy}{|a|} \\ &= \frac{1}{|a|}f(0) = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx \end{aligned}$$

である。したがって$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$ である。■

この様にして定義したデルタ関数を用いれば、空間の各点 $\mathbf{r}_i (i = 1, 2, \ldots)$ に分布した質量 m_i の質点の分布は、次の様にして与えられる。

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_i m_i \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \tag{5.31}$$

ただし $\delta^{(3)}(\mathbf{r})$ は 3 次元のデルタ関数で、

$$\mathbf{r} = (x, y, x)$$

とすれば

$$\delta^{(3)}(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) \tag{5.32}$$

と定義されている。点電荷、点熱源、1 点にかかる撃力などもすべてデルタ関数であらわされる。

デルタ関数 $\delta(x)$ の定義としては、(5.24)(5.25) の他にも次の様なものがある。

$$\delta(x) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\pi}\frac{\sin\lambda x}{x}, \tag{5.33}$$

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}. \tag{5.34}$$

これらを説明しよう。

例題 5.4 (5.33)(5.34) がデルタ関数になっていることを示せ。

解. まず (5.33) を示そう。$\lambda > 0$ として、複素積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{f(z)e^{i\lambda z}}{z} \tag{5.35}$$

を考えよう。$f(z)$ は $|z| \to \infty$ で有界であるとすれば、図 5.3 のように半円周の積分路を加えて、積分を複素平面上、上半平面で閉じてやっても値は変らない。$z = 0$ を $f(z)$ の正則点とする。すると $z = 0$ は $f(z)e^{i\lambda z}/z$ の 1 位の極であるので、上の積分では $z = 0$ を上または下に逃げておかなくてはならない。(図 5.3) ここでは半径 ρ の半円で上に逃げることにする。また複素 z 平面上、上半平面にある $f(z)$ の極を $\{z_n\}$ とし、そこでの留数を $Res(f:z_n)$ と書くことにする。上の様に書いた積分路を C とすると、C にそった積分の値は次の様になる。

$$\begin{aligned}\oint_C dx\frac{f(z)e^{i\lambda z}}{z} &= \int_{-R}^{-\rho}\frac{f(x)e^{i\lambda x}}{x}dx + \int_{\rho}^{R}\frac{f(x)e^{i\lambda x}}{x}dx \\ &\quad + \int_{\pi}^{0} id\theta\rho e^{i\theta}\frac{f(\rho e^{i\theta})e^{i\lambda\rho e^{i\theta}}}{\rho e^{i\theta}} + \int_0^{\pi} id\theta Re^{i\theta}\frac{f(Re^{i\theta})e^{i\lambda Re^{i\theta}}}{Re^{i\theta}}\end{aligned} \tag{5.36}$$

右辺第 3 項では $z = \rho e^{i\theta}$, 第 4 項では $z = Re^{i\theta}$ とおいて、半径ρ および R の半円周上での積分である。

////////////////////////////////////
////////////////////////////////////
////////////////////////////////////
////////////////////////////////////
//図 5.3//////////////////////////////
////////////////////////////////////

////////////////////////////////////
////////////////////////////////////
////////////////////////////////////
一方、この積分路の内部には特異点は $f(z)$ の極だけしかないから、この積分の値は

$$\oint_C dx \frac{f(z)e^{i\lambda z}}{z} = 2\pi i \sum_n Res(f(z)\frac{e^{i\lambda z}}{z} : z_n) \tag{5.37}$$

となる。ここで $\rho \to 0$, $R \to \infty$ の極限を考える。(5.36) の第 3 項、第 4 項は

$$\lim_{\rho\to 0}\int_\pi^0 id\theta f(\rho e^{i\theta})e^{i\lambda\rho e^{i\theta}} = -\pi i f(0),$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^\pi id\theta f(Re^{i\theta})e^{i\lambda Re^{i\theta}} = 0 \tag{5.38}$$

となる。$\sin\lambda x/x$ については $x=0$ では値 λ をとり正則である。したがって

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{\sin\lambda x}{x}dx = \frac{1}{i}\lim_{\substack{\rho\to 0\\ R\to\infty}}\{\int_{-R}^{-\rho}\frac{f(x)e^{i\lambda x}}{x}dx + \int_\rho^R \frac{f(x)e^{i\lambda x}}{x}dx\} \tag{5.39}$$

である。(5.36)~(5.39) より

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{\sin\lambda x}{x}dx - \pi f(0) = 2\pi\sum_n Res(f(z)\frac{e^{i\lambda z}}{z} : z_n) \tag{5.40}$$

となる。右辺の和は、上半平面にある $f(z)$ のすべての極についてとる。ここで $\lambda\to\infty$ の極限を考える。z_n は上半平面にあり $I_m z_n > 0$ であるので

$$e^{i\lambda z_n} \to 0 \ (\lambda\to\infty)$$

である。したがって $|z|\to\infty$ で有界である任意の $f(z)$ について、極 $z=z_n$からの寄与は、m 位の極であっても、$\lambda\to\infty$ のとき $e^{-\lambda Im(z_n)}$で小さくなる。以上から

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{\sin\lambda x}{x}dx = f(0) \tag{5.41}$$

が示された。すなわち (5.33) である。
第 2 の表式 (5.34) についても

$$\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = \frac{1}{2i}[\frac{1}{x-i\varepsilon} - \frac{1}{x+i\varepsilon}] \tag{5.42}$$

と書きなおして同じ様に

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz\frac{\varepsilon}{z^2+\varepsilon^2}f(z) \tag{5.43}$$

を考えればよい。積分路は、上或いは下、いずれの側で閉じてもよい。閉じるために付け加えた積分路からの寄与は実際にはゼロで、$f(z)$ の極と $z=+i\varepsilon$ または $z=-i\varepsilon$ からの寄与だけが残る。例えば、上半平面で閉じるなら

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\varepsilon}{z^2+\varepsilon^2} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{f(i\varepsilon)}{2i} + \sum_n 2\pi i Res(f(z)\frac{\varepsilon}{z^2+\varepsilon^2} : z_n)$$

となる。z_n は上半平面にある $f(z)$ の極である。ここで $\varepsilon \to 0$ の極限をとると分子にある εのために右辺第 2 項は消えて

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\varepsilon}{z^2+\varepsilon^2} f(z) = f(0) \tag{5.44}$$

となる。■

λ, ε が有限である場合の (5.33)(5.34) の形を図 5.4 に示そう。面積が 1 で、原点 $x=0$ で鋭いピークを持った関数である。微分も一緒に示しておく。デルタ関数の表式としては

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(ikx) \tag{5.45}$$

というものもある。これについては次の節で詳しく検討することにする。

//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//図 5.4///////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////

5.3 フーリエ級数の収束性とディリクレの定理

もとにもどって (5.1) または (5.15) の収束性を議論しよう。

関数 $f(x)$ は

(1) $[-a,a]$ で絶対可積分、

(2) 有界変動関数、

(3) $[-a,a]$ を 1 周期とする周期関数、

であるとする。絶対可積分とは、絶対値 $|f(x)|$ について

$$\int_{-a}^{a} |f(x)| dx$$

が有限確定値を持つことをいう。

区間 $[-a, a]$ を有限個の部分区間　$(x_0 = -a, x_n = a)$

$$(x_0, x_1), (x_1, x_2), \ldots (x_{n-1}, x_n)$$

に分割した時、その分割に対応した和

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \tag{5.46}$$

の種々の分割に関する上限値を $f(x)$ の全変動 $V(f : [-a, a])$ という。 $V(f : [-a, a])$ が有限である時、関数 $f(x)$ を有界変動または有界変動関数という。有界な単調関数は有界変動であり、その時の全変動は $V(f : [-a, a]) = |f(a) - f(-a)|$ である。有限個の区間に分割した時、それぞれの区間で単調な関数も有界変動である。しかし連続な関数が常に有界変動なわけではない。例えば

$$x \sin \frac{1}{x}$$

は連続だが有界変動ではない (図 5.5)。$\sin \frac{1}{x}$ の極大・極小値をとる x の値は

$$x = \frac{2}{(2n+1)\pi} \quad , \quad (n = \pm 1, \pm 2 \ldots)$$

である。したがって $[0, \pi]$ における全変動は

$$V(x \sin \frac{1}{x} : [0, \pi]) > \frac{4}{\pi}[\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots]$$

と評価でき、右辺は発散するからである。

//////////////////////////////////////
//////////////////////////////////////
//////////////////////////////////////
//////////////////////////////////////
//図 5.5///////////////////////////////
//////////////////////////////////////
//////////////////////////////////////
//////////////////////////////////////
//////////////////////////////////////

性質 (1) ～ (3) を持つ関数 $f(x)$ について (5.1) の部分和

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}(a_k \cos \frac{k\pi x}{a} + b_k \sin \frac{k\pi x}{a}) \tag{5.47}$$

を考えよう。ここで

$$a_k = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\cos\frac{k\pi x}{a}dx \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.48}$$

$$b_k = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\sin\frac{k\pi x}{a}dx \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{5.49}$$

である。(5.48)(5.49) を (5.47) に代入すると

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(t)dt + \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{N}[\cos\frac{k\pi x}{a}\int_{-a}^{a} f(t)\cos\frac{k\pi t}{a}dt + \sin\frac{k\pi t}{a}\int_{-a}^{a} f(t)\sin\frac{k\pi t}{a}dt] \\ &= \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} dt f(t)[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N}\cos\frac{k\pi(x-t)}{a}] \end{aligned} \tag{5.50}$$

となる。

$$Re\sum_{k=0}^{N} e^{ikt} = Re\frac{1-e^{i(N+1)t}}{1-e^{it}} = Re\frac{e^{i(N+\frac{1}{2})t} - e^{-it/2}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t + \sin(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})} \tag{5.51}$$

であるから

$$Re\sum_{k=1}^{N} e^{ikt} = \sum_{k=1}^{N}\cos kt = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{2\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{2}$$

である。これを (5.50) に用いると

$$S_N(x) = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} dt f(t)\frac{\sin\frac{(2N+1)\pi(x-t)}{2a}}{2\sin\frac{\pi(x-t)}{2a}} = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} dt f(x-t)\frac{\sin\frac{(2N+1)\pi t}{2a}}{\sin\frac{\pi t}{2a}} \tag{5.52}$$

と書きかえられる。ここで積分を 2 つの区間に分けて、また $\frac{t}{2} = \xi$ として

$$S_N(x) = \frac{1}{a}\int_0^a d\xi f(x-2\xi)\frac{\sin\frac{(2N+1)\pi\xi}{a}}{\sin\frac{\pi\xi}{a}} + \frac{1}{a}\int_0^a d\xi f(x+2\xi)\frac{\sin\frac{(2N+1)\pi\xi}{a}}{\sin\frac{\pi\xi}{a}} \tag{5.53}$$

が得られる。ところで

$$\begin{aligned} &\int_0^a d\xi f(x+2\xi)\frac{\sin\frac{(2N+1)\pi\xi}{a}}{\sin\frac{\pi\xi}{a}} - \int_0^a d\xi f(x+2\xi)\frac{\sin\frac{(2N+1)\pi\xi}{a}}{\frac{\pi\xi}{a}} \\ = &\int_0^a d\xi f(x+2\xi)(\frac{\frac{\pi\xi}{a}}{\sin\frac{\pi\xi}{a}} - 1)\frac{\sin\frac{(2N+1)\pi\xi}{a}}{\frac{\pi\xi}{a}} \end{aligned} \tag{5.54}$$

であるが、ここで $N \to \infty$ とすると (5.33) により $\frac{\sin(2N+1)\xi}{\xi}$ は $\pi\delta(\xi)$ になる。一方、$\xi = 0$ では

$$[f(x+2\xi)(\frac{\frac{\pi\xi}{a}}{\sin(\frac{\pi\xi}{a})} - 1)]_{\xi\to 0} = 0$$

である。よって (5.54) は $N\to\infty$ の極限で 0 となる。この関係を用いると、さらに (5.53) は書き換えることができ、

$$S_N(x) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{a}\int_0^a d\xi f(x-2\xi)\frac{\sin(2N+1)\pi\xi/a}{\pi\xi/a} - \frac{1}{a}\int_0^a d\xi f(x+2\xi)\frac{\sin(2N+1)\pi\xi/a}{\pi\xi/a}$$

を得る。さらにもう一度 $\frac{\sin(2N+1)\xi}{\xi}\to\pi\delta(\xi)$ を用いると

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} S_N(x) &= \frac{\pi}{a}\int_0^a d\xi f(x-2\xi)\delta(\frac{\pi}{a}\xi) + \frac{\pi}{a}\int_0^a d\xi f(x+2\xi)\delta(\frac{\pi}{a}\xi) \\ &= \int_0^a d\xi f(x-2\xi)\delta(\xi) + \int_0^a d\xi f(x+2\xi)\delta(\xi)\end{aligned} \tag{5.55}$$

となる。最後の変形には (5.30) の第 2 式を用いた。ここで

$$\int_{-a}^a g(x)\delta(x)dx = g(0)$$

$$\int_{-a}^a \delta(x)dx = 1\ ,\ \delta(x) = \delta(-x)$$

であることを考えれば

$$\int_0^a g(x)\delta(x)dx = \frac{1}{2}g(0_+)$$

と評価できる。したがって (5.55) の積分は

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = \frac{1}{2}\{f(x-0)+f(x+0)\} \tag{5.56}$$

となる。すなわちフーリエ級数は、x が連続点であるなら正しく $f(x)$ を与え、また x で $f(x)$ が不連続なら左右から x に近づいた値の平均値を与える。これをディリクレ (Dirichlet) の定理という。仮定 (2) が必要だったのは、有界変動関数であれば連続である必要はなく、しかもその様な点においても $f(x\pm 0)$ が存在するからである。

$x=c$ が $f(x)$ の孤立した不連続点で、それ以外では $f(x)$ は連続であると仮定しよう。この時、係数 a_n を計算すると部分積分により

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{a}\int_{-a}^a f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}dx \\ &= \frac{1}{a}[\frac{a}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{a}f(x)]_{-a}^a - \frac{1}{n\pi}\int_{-a}^a f'(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx \\ &= \frac{1}{n\pi}[\{\sin n\pi f(a) - \sin\frac{n\pi c}{a}f(c_+)\} + \{\sin\frac{n\pi c}{a}f(c_-) + \sin n\pi f(-a)\}] \\ &\quad -\frac{1}{n\pi}\int_{-a}^a f'(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx\end{aligned} \tag{5.57}$$

となる。$f'(x)$ については $[-a,a]$ に不連続点があるかもしれないが、それが孤立しているかぎり最後の項からの寄与は、同様な計算により $1/n^2$ のオーダーの数となる。以上により

$$a_n = -\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi c}{a}\{f(c_+)-f(c_-)\}+O(\frac{1}{n^2}) \tag{5.58}$$

を得る。同様にして b_n も計算できる。

$$b_n = \frac{1}{n\pi}\cos\frac{n\pi c}{a}\{f(c_+)-f(c_-)\}+O(\frac{1}{n^2}) \tag{5.59}$$

これから、不連続点があると係数 a_n, b_n は $1/n$ で小さくなる振舞いをし、フーリエ級数の収束性が遅くなることが分かる。

一般に、関数 $f(x)$ が m 回連続微分可能 (C^m 級, $f(x)$ が m 回微分可能で $f^{(m)}(x)$ が連続) で、$f^{(m+1)}(x)$ が孤立した不連続点を持つ場合には

$$a_n,\ b_n \sim O(\frac{1}{n^{m+2}}) \tag{5.60}$$

となる。したがって滑らかな関数ほど $a_n,\ b_n$ の収束は速い。

もう一度、例題 5.2 の問題

$$f(x) = \begin{cases} -1 & : -\pi < x \le 0 \\ 1 & : 0 < x < \pi \end{cases} \tag{5.61}$$

のフーリエ級数展開

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} \tag{5.62}$$

を考えよう。$n \le N$ の部分和 $S_N(x)$ は

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{N}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = \frac{4}{\pi}\int_0^x\sum_{n=0}^{N}\cos(2n+1)\xi d\xi \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^x\frac{\sin 2(N+1)\xi}{\sin\xi}d\xi \end{aligned} \tag{5.63}$$

と計算できる。ここで $x \to 0_+$ における $S_N(x)$ の振る舞いを見よう。任意の正数 ε に対して

$$|\frac{\sin 2(N_0+1)\xi}{\sin\xi} - \frac{\sin 2(N_0+1)\xi}{\xi}| < \varepsilon$$

を満足する N_0 は必ず存在する。したがって $2(N+1)\xi \equiv \eta$ とおいて、充分大きな N $(N > N_0)$ について

$$S_N(x) \cong \frac{2}{\pi}\int_0^{2(N+1)x}\frac{\sin\eta}{\eta}d\eta \tag{5.64}$$

と書きなおすことができる。積分

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\eta}{\eta}d\eta = \frac{2}{\pi}Si\pi = 1.17897975\ldots \quad (\text{ギブスの定数})$$

に注意する。(5.64) で $2(N+1)x=\pi$ にたもったまま $x\to 0_+, N\to\infty$ とするとこの値を得る。他方、$N\to\infty$ の極限と $x\to 0_+$ の極限を独立に行えば、$S_N(x)$ の値は極限のとり方の順番に依存し、$N\to\infty$ を先に行えば 1 、$x\to 0_+$ を先に行えば 0 となる。

$$\lim_{x\to 0_+}\lim_{N\to\infty} S_N(x) = f(0_+) = 1$$

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{x\to 0_+} S_N(x) = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0_+\\ N\to\infty\\ 2(N+1)x=\pi}} S_N(x) = 1.17897975\ldots \tag{5.65}$$

したがって不連続点 $x=0$ の近傍で部分和 $S_N(x)$ は一様収束しない。$S_N(x)$ の振舞いは図 5.1 で見たとうりである。フーリエ級数の部分和に関するこの様な振舞いをギブス現象という。

5.4 最小誤差近似

実際に関数 $f(x)$ をフーリエ級数で表して数値的取り扱いをする時には、無限個の項を扱うのは現実的ではない。ここでは、少し見方を変えて、関数 $f(x)$ を有限個の 3 角関数で近似することを考えよう。具体的には、関数 $f(x)$ の近似式として次のものを考える。

$$\varphi_N(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}(\alpha_k\cos\frac{k\pi x}{a} + \beta_k\sin\frac{k\pi x}{a}) \tag{5.66}$$

この時、"最も適した "近似を行うには係数 α_n, β_n をどのように選べばよいだろうか。$\varphi_N(x)$ の近似式として良し悪しの度合いを計る尺度はいろいろなものが考えられる。例えば、

$$\operatorname*{Max}_{x\in[-a,a]} |f(x)-\varphi_N(x)|$$

もその 1 つである。しかし、これでは $[-a,a]$ の区間全体がどうなっているかの評価は難しい。そこで次のような 2 乗平均誤差を考えることにする。(勿論、これがすべての目的に " 最も適して "いるわけではない。)

$$\delta_N^2 = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}|f(x)-\varphi_N(x)|^2 dx\ . \tag{5.67}$$

そしてこの 2 乗平均誤差 δ_N^2 を最小にするように $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_N, \beta_1 \ldots \beta_N$ を決めよう。δ_N^2 は計算すると

$$\begin{aligned}
\delta_N^2 &= \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\{f(x)^2 - 2f(x)\varphi(x) + \varphi(x)^2\}dx \\
&= \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} dx\{f(x)^2 - \alpha_0 f(x) - 2f(x)\sum_{k=1}^{N}(\alpha_k\cos\frac{k\pi x}{a} + \beta_k\sin\frac{k\pi x}{a}) \\
&+\frac{\alpha_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{N}(\alpha_k^2\cos^2\frac{k\pi x}{a} + \beta_k^2\sin^2\frac{k\pi x}{a} + 2\alpha_k\beta_k\sin\frac{k\pi x}{a}\cos\frac{k\pi x}{a}) \\
&+\sum_{k\neq l}(\alpha_k\cos\frac{k\pi x}{a} + \beta_k\sin\frac{k\pi x}{a})(\alpha_l\cos\frac{l\pi x}{a} + \beta_l\sin\frac{l\pi x}{a})\}
\end{aligned} \tag{5.68}$$

である。ここで、3 角関数の直交性 (5.2) を用いると、(5.68) は変形されて

$$\begin{aligned}
\delta_N^2 &= \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x)^2dx - \frac{a_0}{2}\alpha_0 - \sum_{k=1}^{N}(\alpha_k a_k + \beta_k b_k) \\
&+\frac{\alpha_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(\alpha_k^2 + \beta_k^2) \\
&= \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x)^2dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(a_k^2 + b_k^2) \\
&+ \frac{1}{4}(\alpha_0 - a_0)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\{(\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2\}
\end{aligned} \tag{5.69}$$

これから、2 乗平均誤差 δ_N^2 は

$$\delta_N^2 \geq \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x)^2dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(a_k^2 + \beta_k^2) \tag{5.70}$$

と評価できる。最小誤差 (等号の成り立つ場合) は

$$\alpha_0 = a_0, \alpha_n = a_n, \beta_n = b_n \ (n = 1, 2, \ldots, N) \tag{5.71}$$

と選んだ時に与えられる。すなわち、フーリエ級数を適当な項で打ち切った場合には、それは、そこまでの 3 角関数を用いた 2 乗平均誤差を最小とする近似 (最小誤差近似) になっている。

(5.71) の様に選べば、(5.70) の等号が成立する。この時右辺は正または 0 の数であるから一般に

$$\frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)^2dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{N}(a_k^2 + b_k^2)$$

であり、これは $N \to \infty$ でも成立する。

$$\frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)^2dx \geq \frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \tag{5.72}$$

これをベッセルの不等式という。ここで等号が成立する時、すなわち

$$\frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \tag{5.73}$$

を、パーサバルの等式という。パーサバルの等式が成立するならば、$f(x)$ とそのフーリエ級数の部分和 $S_N(x)$ の間には

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-a}^{a} |f(x) - S_N(x)|^2 dx = 0 \tag{5.74}$$

が成立することになる。

すでに見たように、$f(x)$ が $[-a, a]$ を周期とする有界変動関数ならば、すべての点で (5.56) が成立する。したがって (5.74) が成立し、パーサバルの等式が成立していることになる。これは 3 角関数の完全性 (または完備性) といい、フーリエ級数展開を保証している。

5.5 フーリエ式展開と線形空間

フーリエ級数展開では 3 角関数または指数関数による展開 (5.15)(5.18) を考えた。しかし、すでに第 3 章で見たように、それ以外にも、ルジャンドル陪多項式による展開、ベッセル関数による展開などある。このように与えられた (偏) 微分方程式の固有関数によって展開するということは、極く一般的なことである。

区間 $[a, b]$ で定義された関数系 $\{\varphi_n(x)\}$ を考えよう。これらの関数について、内積 は

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b dx\rho(x)f(x)\bar{g}(x) \tag{5.75}$$

と定義されているとする。ただし $\rho(x)$ は $[a, b]$ で定義された負にはならない定まった関数である。$\bar{g}(x)$ は $g(x)$ の複素共役である。この $\rho(x)$ を 重み関数 という。また関数系 $\{\varphi_n(x)\}$ は、この内積に関して、規格直交関係

$$\langle \varphi_n, \varphi_m\rangle = \int_a^b \rho(x)\varphi_n(x)\bar{\varphi}_m(x)dx = \delta_{nm} \tag{5.76}$$

を満しているとする。δ_{nm} はクロネッカーのデルタといい

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & : n = m \\ 0 & : n \neq m \end{cases}$$

と定義される。(5.75) のように定義した $\langle f, g\rangle$ は、内積の公理：

$$\begin{aligned}
&(i) && \langle f, f\rangle \geq 0 \text{ かつ } \langle f, f\rangle = 0 \rightleftharpoons f(x) \equiv 0 \\
&(ii) && \langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle} \\
&(iii) && \langle f_1 + f_2, g\rangle = \langle f_1, g\rangle + \langle f_2, g\rangle \\
&(iv) && \text{定数}\alpha\text{について } \langle \alpha f, g\rangle = \alpha\langle f, g\rangle
\end{aligned} \tag{5.77}$$

を満足する。さらに

$$||f|| = \sqrt{\langle f, f\rangle} \tag{5.78}$$

をノルムという。ノルムは次の性質 (ノルムの公理) を満足している。

$$\begin{aligned} &(i) && ||f|| \geq 0 \text{ かつ } ||f|| = 0 \rightleftharpoons f(x) = 0 \\ &(ii) && ||f+g|| \leq ||f|| + ||g|| \text{ (3 角不等式)} \\ &(iii) && \text{定数}\alpha\text{について } ||\alpha f|| = |\alpha| \cdot ||f|| \end{aligned} \tag{5.79}$$

内積とノルムについて簡単な例題をやってみよう。

例題 5.5 シュワルツの不等式

$$|\langle f, g\rangle| \leq ||f|| \cdot ||g|| \tag{5.80}$$

を説明せよ。

解.$f(x), g(x)$ が関数であるということをあからさまに使わずに、内積の定義と公理のみを用いていくことができる。α と β を任意の複素数として

$$0 \leq ||\alpha f + \beta g||^2 = |\alpha|^2 \cdot ||f||^2 + \alpha\bar{\beta} \cdot \langle f, g\rangle + \bar{\alpha}\beta \cdot \overline{\langle f, g\rangle} + |\beta|^2 \cdot ||g||^2$$

が成立している。ここで $\alpha = ||g||^2, \beta = -\langle f, g\rangle$ と選べば

$$0 \leq ||g||^2 \{||g||^2 \cdot ||f||^2 - |\langle f, g\rangle|^2\}$$

となる。したがって $||g|| = 0$ の時を含めてシュワルツの不等式が成立している。■

例題 5.6 シュワルツの不等式を用いて、3 角不等式を証明せよ。

解.

$$||f+g||^2 \leq (||f|| + ||g||)^2$$

を示せばよい。これを整理すると

$$\langle f, g\rangle + \langle g, f\rangle \leq 2||f|| \cdot ||g||$$

となる。あるいは $\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}$ を用いれば

$$\{Re\langle f, g\rangle\}^2 \leq ||f||^2 \cdot ||g||^2 \tag{5.81}$$

である。(5.88) を示すことにする。複素数 z について、実数部、虚数部を x, y として

$$z = x + iy$$

と書いたとき、

$$x^2 \leq x^2 + y^2 = |z|^2$$

であるから一般に、

$$|Re\langle f,g\rangle|^2 \leq |Re\langle f,g\rangle|^2 + |Im\langle f,g\rangle|^2 = |\langle f,g\rangle|^2$$

が成立する。一方、シュワルツの不等式は

$$|\langle f,g\rangle|^2 \leq ||f||^2 \cdot ||g||^2$$

であったから

$$|Re\langle f,g\rangle|^2 \leq ||f||^2 \cdot ||g||^2$$

すなわち (5.81) が成立する。したがって 3 角不等式が成立している。3 角不等式は、3 次元のベクトルに関しては、3 角形の 2 辺の長さ (ノルム) の和は、1 辺の長さ (ノルム) より常に長い、ということを述べていることから名づけられている。■

もとにもどって、区間 $[a,b]$ で与えられた関数 $f(x)$ が、規格直交関数系 $\{\varphi_n(x)\}$ で展開できて、

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \tag{5.82}$$

が成立しているとする。これをフーリエ式展開という。$\bar{\varphi}_m(x)$ をかける形で内積を計算すると、項別積分が許されると仮定すれば

$$\begin{aligned} \langle f,\varphi_m\rangle &= \int_a^b dx \rho(x) f(x) \bar{\varphi}_m(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \langle \varphi_k, \varphi_m\rangle = c_m \end{aligned} \tag{5.83}$$

を得る。すなわち展開系数 c_m は内積 $\langle f,\varphi_m\rangle$ で与えられる。部分和

$$\Gamma_N(x) = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \varphi_k(x) \tag{5.84}$$

を考え、内積 (5.75) のもとで、最小誤差近似となるように係数 γ_k を定めてみよう。2 乗平均誤差 δ_N は

$$\delta_N^2 = ||f - \Gamma_N||^2/(b-a) \tag{5.85}$$

である。これを計算すると

$$\begin{aligned} \delta_N^2 &= \frac{1}{b-a}[||f||^2 - \langle f,\Gamma_N\rangle - \langle \Gamma_N, f\rangle + \langle \Gamma_N,\Gamma_N\rangle] \\ &= \frac{1}{b-a}[||f||^2 - \sum_{k=1}^{N}(c_k\bar{\gamma}_k + \bar{c}_k\gamma_k) + \sum_{k=1}^{N}|\gamma_k|^2] \\ &= \frac{1}{b-a}[||f||^2 - \sum_{k=1}^{N}|c_k|^2 + \sum_{k=1}^{N}|c_k - \gamma_k|^2] \geq 0 \end{aligned} \tag{5.86}$$

となる。これから直ちに、最小誤差は

$$\gamma_k = c_k = \langle f, \varphi_k \rangle \tag{5.87}$$

と定めた時であり、また任意の N については

$$||f||^2 \geq \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2 \quad ,$$

あるいは

$$||f||^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \tag{5.88}$$

成立することが示される。(5.88) の不等式を、ベッセルの不等式、等号が成立する時にはその等式をパーサバルの等式という。パーサバルの等式が成立する時、規格直交関数系 $\{\varphi_n(x)\}$ は完全であるという。関数系が完全であるとは、与えられた関数 $f(x)$ について、展開 (5.82) が 2 乗平均誤差をゼロにするという意味で成立するということである。上で議論した、一般の関数を完全な規格直交関数系で展開する議論は、形式的には普通のベクトルに関して学んだことを繰り返しているにすぎない。すなわち、関数の集合が線形空間を形成しているのである。

規格直交関数系による展開を考える時、ワイエルストラス (Weierstrass) の定理は重要である。

ワイエルストラスの定理:区間 $[a, b]$ において $f(x)$ が連続であるならば、任意の $\varepsilon > 0$ に対して x によらずに

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

とする x の多項式 $P(x)$ が存在する。

閉区間 $[a, b]$ において $f(x)$ はフーリエ級数 (5.15) に展開可能である。この 3 角関数をすべて $x = 0$ の周りでテイラー展開すれば、それは x の多項式となる。よって、多項式 $P(x)$ の存在が保証される。

閉区間で互いに直交する多項式が具体的にどのようなものであるか考えてみよう。

例題 5.7 $-1 \leq x \leq 1$ において正規直交関数系をなす x の多項式を次数の低いものから順に構成せよ。重み関数は $\rho(x) = 1$ とする。

解. x の多項式 $\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ から正規直交系を作る。一般に関数系 $\{f_n(x)\}$ から正規直交系を作るには次の様にする。(グラム・シュミットの方法) この方法は、通常のベクトルについても用いられる。

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= \frac{f_0(x)}{||f_0||}, \qquad (5.89) \\ g_1(x) &= f_1(x) - \langle f_1, \phi_0 \rangle \phi_0(x), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\phi_1(x) &= \frac{g_1(x)}{||g_1||}, & (5.90)\\
g_2(x) &= f_2(x) - \langle f_2, \phi_0\rangle\phi_0(x) - \langle f_2, \phi_1\rangle\phi_1(x), \\
\phi_2(x) &= \frac{g_2(x)}{||g_2||}, & (5.91)\\
&\vdots \\
g_n(x) &= f_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\langle f_n, \phi_k\rangle\phi_k(x), \\
\phi_n(x) &= \frac{g_n(x)}{||g_n||}, & (5.92)\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$||g_n||$ は $g_n(x)$ のノルム $\sqrt{\langle g_n, g_n\rangle}$ である。(5.92) の第 1 式右辺では、$f_n(x)$ から$\phi_0(x)$, $\phi_1(x)\ldots$, $\phi_{n-1}(x)$ 成分の要素を取り除き、それらに直交する成分だけで新しい n 番目の基底を構成している。(5.92) の第 2 式ではさらにそれを正規化、すなわちノルムが 1 のものに定義しなおしている。(5.92) の第 1 式からは

$$\langle \phi_k, g_n\rangle = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

が示される。第 2 式によりこれは

$$\langle \phi_k, \phi_n\rangle = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \tag{5.93}$$

となる。したがってすべての異なる ϕ_n は互いに直交している。

内積の定義を $\langle g, f\rangle = \int_{-1}^{1} g(x)\bar{f}(x)dx$ としてこの方法を $\{f_n(x) = x^n \quad ,(n = 0, 1, 2\ldots)\}$ に適用する。

$$||f_0||^2 = \int_{-1}^{1} 1 \cdot dx = 2$$

であるから

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{5.94}$$

となる。これから

$$
\begin{aligned}
g_1(x) &= x - \langle x, \frac{1}{\sqrt{2}}\rangle\frac{1}{\sqrt{2}} = x, \\
||g_1||^2 &= \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}, \\
\phi_1(x) &= \sqrt{\frac{3}{2}}x & (5.95)
\end{aligned}
$$

を得る。さらに

$$\begin{aligned} g_2(x) &= x^2 - \langle x^2, \frac{1}{\sqrt{2}}\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} - \langle x^2, \sqrt{\frac{3}{2}}x\rangle \sqrt{\frac{3}{2}}x = x^2 - \frac{1}{3}, \\ ||g_2||^2 &= \frac{8}{45}, \\ \phi_2(x) &= \frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2 - 1) \end{aligned} \tag{5.96}$$

となる。n が 1 つ増すごとに x の偶関数、奇関数が交互にあらわれ、 n が偶数 (奇数) なら n 以下の偶数 (奇数) べきの項のみからなる。ここであらわれた$\phi_n(x)$ を

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x) \tag{5.97}$$

と書くと、$P_n(x)$ はよく知られた n 次ルジャンドル多項式となる。証明は省略するが、$P_n(x)$ は、微分方程式

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}P_n(x) - 2x\frac{d}{dx}P_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0 \tag{5.98}$$

の解となっている。この微分方程式は第 3 章であらわれたものであり、また $P_n(x)$ は、ルジャンドルの陪多項式 $P_{nm}(x)$ で $m = 0$ としたものでもある。■

2 階の偏微分方程式を解いてあらわれるスツルム・リュービル型微分方程式の解 (固有関数) は、この様な直交関数になっていることはすでに第 4 章で見たとうりである。またそれらは完全系を構成しているが、そのことの一般的な証明は難しいのでここでは省略する。(5.82) で示したフーリエ式展開が、スツルム・リュービル型固有関数について有効である理由はこの直交性と完全性にある。

5.6 付録:複素積分に関する留数の定理

複素積分を学んでいない読者のために簡単な説明を加えておこう。

複素数 $z = x + iy$ を変数とする関数 $f(z)$ が、$z = z_0$ の周りで

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \ldots + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots \tag{5.99}$$

と展開できるとする。これをローラン展開という。この時、$z = z_0$ を $f(z)$ の n 位の極という。この関数を $z = z_0$ の周りを正の方向に一周する積分路 C(図 A-1) の上で積分することを

$$\oint_C f(z)dz \tag{5.100}$$

と書く。この積分の値は z_0 を積分路 C の中の唯一の $f(z)$ の極とすれば

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i a_{-1} \tag{5.101}$$

である。a_{-1} を $f(z)$ の $z = z_0$ における留数といい $Res(f(z) : z_0)$ と書く。したがって

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i Res(f(z) : z_0) \tag{5.102}$$

である。積分路を動かしても、それが、z_0 やあるいは $f(z)$ の他の極を横切らなければ、積分の値は変化しない。

//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//図 A-1///////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////

関数 $f(z)$ が $z = \infty$ で正則であるとする。積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx}dx \tag{5.103}$$

を複素積分を用いて計算して見よう。$k > 0$ とする。この時、図 A-2 の様に、複素 z 平面上で半円の積分路を加えた C を考えてみよう。半円の円周を $z = Re^{i\theta}$ とおいてあとで $R \to \infty$ の極限を考える。そこでは

$$e^{ikz} = e^{ik(Re^{i\theta})} = e^{ikR\cos\theta}e^{-kR\sin\theta}$$

である。したがって半円を大きくすると $e^{-kR\sin\theta}$ $(0 < \theta < \pi)$ はすみやかに 0 となり、半円周の長さが πR で長くなっても

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} d\theta R e^{-kR\sin\theta}|f(Re^{i\theta})| = 0$$

となる。これが半円上での積分値の絶対値の上限を与える。よって

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)e^{ikx} = \oint_C dz f(z)e^{ikz} \tag{5.104}$$

と書き換えられる。この積分は、積分路 C の中にある極からの留数の和で与えられるのである。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)e^{ikx} = 2\pi i \sum_{0<Arg(z_n)<\pi} Res(f(z)e^{ikz} : z_n). \tag{5.105}$$

ここでは $k>0$ と仮定したため $0<Arg(z)<\pi$ の領域 (上半 z-平面) で積分路を閉じても積分の値は変わらなかった。$k<0$ の場合には $\pi<Arg(z)<2\pi$ の領域 (下半 z-平面) で積分路を閉じることができる。この時、積分路は負の方向 (z の偏角が減る方向) にまわっているため

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{ikx} = -2\pi i \sum_{\pi<Arg(z'_n)<2\pi} Res(f(z)e^{ikz} : z'_n) \tag{5.106}$$

となり、前の式とは符号が逆転する。