

Chapter 3

変数分離と固有値問題

3.1 座標変換と変数分離

偏微分方程式の解を様々な境界条件で解くとき、その境界条件に合った直交曲線座標系を考えると便利ことが多い。簡単な例題として、太鼓の膜の振動を考えよう。

第1章では1次元の波動方程式を導いた。2次元膜の場合には、膜面 ($x-y$ 面) に垂直な方向の変形を $u(x, y, t)$ とし、微小面要素 $dxdy$ に働く膜面に垂直な力を考える。辺 $(x+dx, y) \sim (x+dx, y+dy)$ に沿って張力は、 y 軸に垂直で x 軸にほとんど平行で僅かに u 方向の成分を持っている。辺 $(x, y) \sim (x, y+dy)$ に沿った張力も同様で、正味 $dxdy$ に働く u 方向の張力は $T_0 \partial^2 u / \partial x^2$ である (T_0 は表面張力)。同じように辺 $(x+dx, y+dy) \sim (x, y+dy)$ と $(x+dy, y) \sim (x, y)$ に働く力の正味の u 方向成分は $T_0 \partial^2 u / \partial y^2$ となる。したがって、振動の運動方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u \quad (3.1)$$

となる (ただし、面密度を ρ をとし $c = \sqrt{T_0/\rho}$)。これが2次元の波動方程式である。

例題 3.1 周囲が固定された長方形の膜 $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ の振動方程式 (波動方程式) について、解の形を x, y, t それぞれの関数の積

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t) \quad (3.2)$$

と仮定し X, Y, T の満たす微分方程式を定めよ。

解. この様に解の形を各々の変数に関して別々の関数に分ける方法を変数分離法という。(3.2) を (3.1) に代入すると

$$XY \frac{d^2 T}{dt^2} = c^2 T \left(Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} \right)$$

となる。 $u \neq 0$ であるとしてこれを $u = XYT$ で割ると

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = c^2 \left(\frac{1}{X^2} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} \right) \quad (3.3)$$

となる。左辺は t だけの関係であり、また右辺は第 1 項が x だけ、第 2 項が y だけの関係である。したがってそれぞれは定数でなくてはならない。これらの定数を λ_a, λ_b とすると次の式が導かれる。

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + c^2(\lambda_a + \lambda_b)T = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda_a X = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \lambda_b Y = 0. \quad (3.6)$$

$u = 0$ の時にも (3.4) ~ (3.6) が満たされれば、それは (3.1) の解である。したがって一般に (3.4) ~ (3.6) を考えておけばよい。今考えている変数の領域は、 x, y については

$$0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$$

である。この膜は周囲が固定されているので、境界条件としては

$$X(0) = X(a) = 0 \quad (3.7)$$

$$Y(0) = Y(b) = 0 \quad (3.8)$$

を要求する。こうして、偏微分方程式の境界値問題が 3 つの常微分方程式の境界値問題 (および初期値問題) に変換された。

例題 3.2 周囲が固定された円形の膜 $0 \leq r \leq a$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$) の振動方程式を図 3.1 に示した極座標

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned} \quad (3.9)$$

で表せ。解 u を r, θ, t について

$$u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t) \quad (3.10)$$

と変数分離して、 R, Θ, T の満たす微分方程式を求めよ。

////////////////////////////////////
 //////////////////////////////////////
 //////////////////////////////////////

////////////////////
 //図 3.1////////////////////
 //////////////////////
 //////////////////////
 //////////////////////
 //////////////////////

解. このように境界が円周で与えられている場合には、振動方程式がガリレイ座標系 x, y で変数分離されて (3.4)~(3.6) のようになっても役に立たない。境界条件が (3.7) (3.8) のように便利な形で書けないからである。このようなときには、境界を 1 つの座標が一定である曲線であらわす直交曲線座標を用いるのが便利である。円形膜の問題では境界は $r = a$ であるから、境界条件の 1 つは

$$R(a) = 0 \tag{3.11}$$

と表される。2 次元極座標 (3.9) は書きなおすと

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \tan^{-1} \frac{x}{y} \end{aligned} \tag{3.12}$$

であるから、 $f(x, y) = f(x(r, \theta), y(r, \theta))$ の偏微分は

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ &= \frac{x}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \left(-\frac{y}{r^2}\right) \frac{\partial f}{\partial \theta} = \cos \theta f_r - \frac{\sin \theta}{r} f_\theta, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{y}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{x}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} = \sin \theta f_r + \frac{\cos \theta}{r} f_\theta, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \cos^2 \theta f_{rr} - \frac{\sin 2\theta}{r^2} (r f_{r\theta} - f_\theta) + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} (f_{\theta\theta} + r f_r), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \sin^2 \theta f_{rr} + \frac{\sin 2\theta}{r^2} (r f_{r\theta} - f_\theta) + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} (f_{\theta\theta} + r f_r) \end{aligned} \tag{3.13}$$

となる。ここで

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} / \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial \theta} / \frac{\partial x}{\partial \theta}$$

などという計算をしてはいけない。1 変数の関数 $g(x)$ については逆関数 $x(g)$ との間では

$$\frac{dg(x)}{dx} = 1 / \frac{dx(g)}{dg}$$

という関数があったが、偏微分のときには

$$\frac{\partial r(x, y)}{\partial x} \neq 1 / \frac{\partial x(r, \theta)}{\partial r} \tag{3.14}$$

だからである。 y を固定して x だけを変化させたときの r の変化率が $\partial r / \partial x$ である。このときには $\theta(x, y)$ も x の変化にしたがって変化している。一方、 $\partial x / \partial r$ は θ を固定して r のみを変化させた時の x の変化率である。こちらでは y も変化している。

このようにして振動方程式 (3.1) は、極座標で

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u \quad (3.15)$$

と書き換えられる。(3.15) に (3.10) を代入して整理すると

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = c^2 \frac{1}{R} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) R + c^2 \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2}$$

となる。左辺は定数でなくてはならないし、右辺第 2 項は θ を含んではならない。したがって

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \lambda c^2 T = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \mu \Theta = 0 \quad (3.17)$$

である。これを上の式に代入すれば R は微分方程式

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) R + \left(\lambda - \frac{\mu}{r^2} \right) R = 0 \quad (3.18)$$

を満足しなくてはならないことが分かる。今 λ の正負は問題にせず

$$\rho = \sqrt{\lambda} r \quad (3.19)$$

とすると、(3.18) は

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right) R + \left(1 - \frac{\mu}{\rho^2} \right) R = 0 \quad (3.20)$$

となる。これをベッセルの微分方程式という。

$R(r)$ に関する固定端の境界条件は (3.11) で与えられた。 θ の領域は

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (3.21)$$

であるが、この場合には $\theta = 0$ と $\theta = 2\pi$ とは連続につながってはいなくてはならない。したがって $\Theta(\theta)$ についての境界条件は

$$\Theta(0) = \Theta(2\pi) \quad (3.22)$$

となる。この様な境界条件を周期境界条件という。

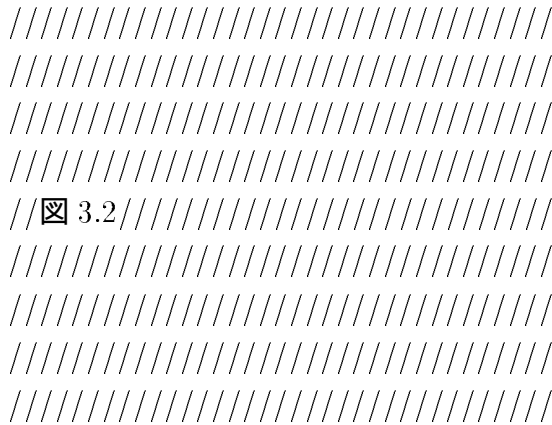
上の直交曲線座標は振動方程式だけではなく、熱伝導方程式やラプラス方程式についても有効である。3次元空間の熱伝導方程式は、温度 $u(x, y, z, t)$ について

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u \quad (3.23)$$

と与えられる。ここに現れた

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.24)$$

は、(3次元)ラプラス演算子(ラプラシアン)である。ラプラス演算子が現れるのは、それが熱流の出入りの正味の値を与えるからである。この微分方程式についても直方体領域を考えるならこのまま x, y, z について変数分離をするのが便利である。一方、境界が球で与えられるならば、3次元の極座標を用いるのが便利である。まず3次元のラプラス演算子を図3.2に示す極座標 (r, θ, ϕ) で表しておこう。



例題 3.3. 3次元のラプラス演算子を極座標で表せ。

解. 変数変換

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (3.25)$$

を行う。 θ, ϕ の領域は、

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

である。(3.25) を書き直すと

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \phi &= \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{aligned} \quad (3.26)$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r} = \sin \theta \cos \phi, \\
\frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r} = \sin \theta \sin \phi, \\
\frac{\partial r}{\partial z} &= \frac{z}{r} = \cos \theta, \\
\frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{xz}{r^2 \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\cos \theta \cos \phi}{r}, \\
\frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{yz}{r^2 \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\cos \theta \sin \phi}{r}, \\
\frac{\partial \theta}{\partial z} &= -\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r}, \\
\frac{\partial \phi}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin \phi}{r \sin \theta}, \\
\frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos \phi}{r \sin \theta}, \\
\frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0
\end{aligned} \tag{3.27}$$

である。これから

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \phi} \\
&= \sin \theta \cos \phi u_r + \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} u_\theta - \frac{\sin \phi}{r \sin \theta} u_\phi, \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \sin \theta \sin \phi u_r + \frac{\cos \theta \sin \phi}{r} u_\theta + \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} u_\phi, \\
\frac{\partial u}{\partial z} &= \cos \theta u_r - \frac{\sin \theta}{r} u_\theta
\end{aligned} \tag{3.28}$$

となる。さらに労をいとわず計算を進めると次の式を得る。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \\
&= \sin \theta \cos \phi \left\{ \sin \theta \cos \phi u_{rr} - \frac{\cos \theta \cos \phi}{r^2} u_\theta + \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} u_{\theta r} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sin \phi}{r^2 \sin \theta} u_\phi - \frac{\sin \phi}{r \sin \theta} u_{\phi r} \right\} \\
&+ \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} \left\{ \cos \theta \cos \phi u_r + \sin \theta \cos \phi u_{r\theta} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sin \theta \cos \phi}{r} u_\theta + \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} u_{\theta\theta} + \frac{\cos \theta \sin \phi}{r \sin^2 \theta} u_\phi - \frac{\sin \phi}{r \sin \theta} u_{\phi\theta} \right\} \\
&- \frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \left\{ -\sin \theta \sin \phi u_r + \sin \theta \cos \phi u_{r\phi} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\cos \theta \sin \phi}{r} u_{\theta} + \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} u_{\theta \phi} - \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} u_{\phi} - \frac{\sin \phi}{r \sin \theta} u_{\phi \phi} \}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \sin \theta \sin \phi \left\{ \sin \theta \sin \phi u_{rr} - \frac{\cos \theta \sin \phi}{r^2} u_{\theta} + \frac{\cos \theta \sin \phi}{r} u_{\theta r} \right. \\
& \quad \left. - \frac{\cos \phi}{r^2 \sin \theta} u_{\phi} + \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} u_{\phi r} \right\} \\
& + \frac{\cos \theta \sin \phi}{r} \left\{ \cos \theta \sin \phi u_r + \sin \theta \sin \phi u_{r\theta} \right. \\
& \quad \left. - \frac{\sin \theta \sin \phi}{r} u_{\theta} + \frac{\cos \theta \sin \phi}{r} u_{\theta \theta} - \frac{\cos \theta \cos \phi}{r \sin^2 \theta} u_{\phi} + \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} u_{\phi \theta} \right\} \\
& + \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \left\{ \sin \theta \cos \phi u_r + \sin \theta \sin \phi u_{r\phi} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} u_{\theta} + \frac{\cos \theta \sin \phi}{r} u_{\theta \phi} - \frac{\sin \phi}{r \sin \theta} u_{\phi} + \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} u_{\phi \phi} \right\}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \cos \theta \left\{ \cos \theta u_{rr} + \frac{\sin \theta}{r^2} u_{\theta} - \frac{\sin \theta}{r} u_{\theta r} \right\} \\
& - \frac{\sin \theta}{r} \left\{ -\sin \theta u_r + \cos \theta u_{r\theta} - \frac{\cos \theta}{r} u_{\theta} - \frac{\sin \theta}{r} u_{\theta \theta} \right\}. \tag{3.29}
\end{aligned}$$

これらを整理してまとめれば、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\cos \theta}{\sin \theta} u_{\theta} + u_{\theta \theta} \right\} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} u_{\phi \phi} \tag{3.30}$$

となる。したがってラプラシアンを極座標表示で書くと

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\} \\
&= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\} \tag{3.31}
\end{aligned}$$

となる。

この極座標表示されたラプラシアンを用いて、球の熱伝導方程式を書いてみよう。

例題 3.4 球（半径 a ）の表面が温度 0 に保たれているとき、熱伝導方程式と境界条件を極座標を用いて表せ。

解. 熱伝導方程式を極座標で書くと、

$$\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) u + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\} u \tag{3.32}$$

となる。変数分離の解

$$u(r, \theta, \phi, t) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\phi) T(t) \tag{3.33}$$

を仮定して代入し整理すると

$$\frac{1}{c} \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{R} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) R + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} \right\}$$

となる。左辺および右辺 $\{ \}$ 内は定数でなくてはならない等から、整理すると

$$\frac{dT}{dt} + c\lambda T = 0 \quad (3.34)$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \kappa\Phi = 0 \quad (3.35)$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(\mu - \frac{\kappa}{\sin^2\theta} \right) \Theta = 0 \quad (3.36)$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) R + \left(\lambda - \frac{\mu}{r^2} \right) R = 0 \quad (3.37)$$

となる。 λ, κ, μ は定数である。境界は $r = a$ で与えられ、さらに θ および ϕ についての領域は

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \quad (3.38)$$

で、 ϕ は 0 と 2π がつながっている。これらから境界条件としては

$$\begin{aligned} R(a) &= 0, \\ \Phi(0) &= \Phi(2\pi) \end{aligned} \quad (3.39)$$

でなくてはならない。さらに、球の内部にも表面にも熱源はないので、 $R(r)$ ($0 \leq r \leq a$) および $\Theta(\theta)$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) について値が発散するなどの特異性がない、というのも重要な要求である。

3.2 固有値と固有関数

変数分離の結果いろいろな常微分方程式がそれぞれの境界条件の下で登場してきた。たとえば例題 3.1 は次の様な形に書き換えられた。

$$\frac{d^2T}{dt^2} + c^2(\lambda_a + \lambda_b)T = 0 \quad (3.40)$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda_a X = 0, \quad X(0) = X(a) = 0 \quad ; 0 \leq x \leq a \quad (3.41)$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + \lambda_b Y = 0, \quad Y(0) = Y(b) = 0 \quad ; 0 \leq y \leq b. \quad (3.42)$$

(3.41) を詳しく調べてみよう。

最初に $\lambda_a < 0$ であると仮定しよう。この場合、一般解は

$$X(x) = d_1 e^{\sqrt{-\lambda_a}x} + d_2 e^{-\sqrt{-\lambda_a}x} = e_1 \sinh \sqrt{-\lambda_a}x + e_2 \cosh \sqrt{-\lambda_a}x$$

となる。ただし \sinh, \cosh は双曲線関数で、各々 ハイパボリック・サイン, ハイパボリック・コサインと呼び、

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

と定義される。

$X(0) = 0$ であるから、 $e_2 \equiv 0$ でなくてはならず

$$X(x) = e_1 \sinh \sqrt{-\lambda_a} x$$

となる。しかしこれは x の単調関数であり、 $e_1 > 0$ または $e_1 < 0$ の時に単調に増加または減少するだけで、再び $X(a) = 0$ となることはない。 $\frac{X''}{X} > 0$ だから $X > 0$ の範囲では X は下に凸な関数に、 $X < 0$ の範囲では上に凸な関数になってしまうからである。したがって $\lambda_a < 0$ ということは許されない。

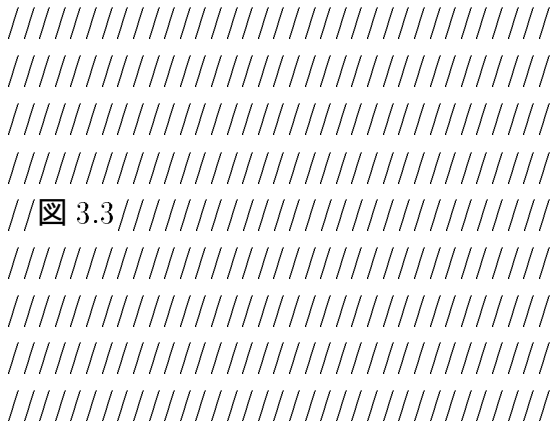
次に $\lambda_a > 0$ と仮定しよう。この時、一般解は

$$X(x) = d_1 \sin \sqrt{\lambda_a} x + d_2 \cos \sqrt{\lambda_a} x$$

である。 $X(0) = 0$ であるから $d_2 = 0$ であり

$$X(x) = d_1 \sin \sqrt{\lambda_a} x$$

となる。この場合には $\frac{X''}{X} < 0$ であるから $X > 0$ で上に凸であり、一方 $X < 0$ では下に凸な関数となる。したがって $X(x)$ は振動的に振る舞い、一般的には $x = 0, a$ の両方で境界条件を満たすことができるようになる。この関数も正の任意の値 λ_a に関しては $X(a) = 0$ を満足することはなく、適当な値についてのみ満たされる (図 3.3)



$X(a) = 0$ の境界条件により、定数 λ_a の値は

$$\sqrt{\lambda_a} a = n\pi \quad \text{すなわち} \quad \lambda_a^n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (3.43)$$

と定まる。また $X(x)$ は

$$X(x) = d \sin \sqrt{\lambda_a^n} x = d \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (3.44)$$

と定まる。このように境界条件により定まる λ_a を固有値といい、その時の $X(x)$ を固有関数という。

$Y(y)$ についても全く同様にして固有値、固有関数が

$$\lambda_b^m = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.45)$$

$$Y(y) = d' \sin \sqrt{\lambda_b^m} y = d' \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (3.46)$$

と定まる。固有値 λ_a^n, λ_b^m が定めれば (3.40) を解くことができる。(3.40) は書きなおすと

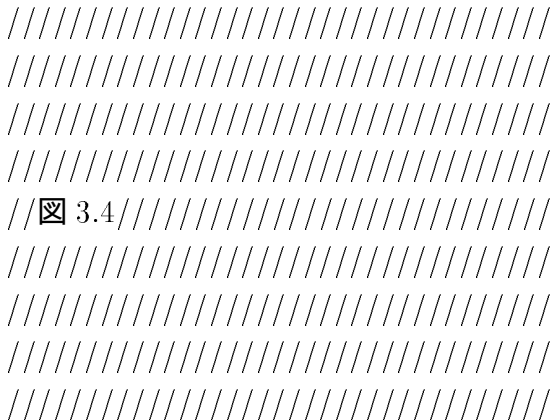
$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega_{nm}^2 T(t) = 0, \quad \omega_{nm}^2 = \left\{ \left(\frac{n\pi c}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi c}{b}\right)^2 \right\} \quad (3.47)$$

である。したがって角振動数 (固有振動数) が ω_{nm} になっていて、(3.47) の解は

$$\begin{aligned} T(t) &= f_1 \sin \omega_{nm} t + f_2 \cos \omega_{nm} t \\ &= g_1 e^{i\omega_{nm} t} + g_2 e^{-i\omega_{nm} t} \end{aligned} \quad (3.48)$$

と求められる。定数 f_1, f_2 または g_1, g_2 の値は初期条件 $T(0)$ および $\frac{dT(0)}{dt}$ の値により決められる。

以上によって長方形膜の振動の振る舞いが求められた。振動数とはびとびの値をとる。 n, m の変化による振動の節の様子を図 3.4 に示しておこう。振動数が高くなると節の数がふえる。このような解の振る舞いに関する一般的な性質は第 4 章で議論する。



同じようにして、2次元円形膜の振動を調べてみよう。

例題 3.5 周囲が固定された 2次元円形膜 (半径 a) の振動を解いて節の様子を説明せよ。

解. 例題 3.2 の結果により、

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \lambda c^2 T = 0 \quad (3.49)$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \mu\Theta = 0 \quad (3.50)$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)R + \left(\lambda - \frac{\mu}{r^2}\right)R = 0 \quad (3.51)$$

を境界条件

$$\Theta(0) = \Theta(2\pi), R(a) = 0$$

の下で解けばよい。

最初に (3.50) を考えよう。長方形膜 (3.41) (3.42) で考えたのと全く同じ理由で、 $\mu < 0$ の場合には Θ は単調関数となり、例えば $\Theta > 0$ で出発すれば増加するばかりで $\theta = 2\pi$ で $\theta = 0$ における値に戻ることはない。したがって $\mu > 0$ でなくてはならない。こうしてまず

$$\begin{aligned} \Theta(\theta) &= d_1 e^{i\sqrt{\mu}\theta} + d_2 e^{-i\sqrt{\mu}\theta} \\ &= d'_1 \sin \sqrt{\mu}\theta + d'_2 \cos \sqrt{\mu}\theta \end{aligned} \quad (3.52)$$

を得る。さらに境界条件は $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$ であるから $\Theta(\theta)$ は 2π を周期とした周期関数でなくてはならない。以上により固有値 μ と固有関数が次の様に定まる。

$$\begin{aligned} \mu_n &= n^2, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ \Theta(\theta) &= d \cos \sqrt{\mu_n}(\theta - \theta_0) = d \cos n(\theta - \theta_0). \end{aligned} \quad (3.53)$$

次に μ を (3.51) に代入して、 $R(r)$ に関する微分方程式を考えよう。これは

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)R + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2}\right)R = 0 \quad (3.54)$$

となる。ところで、ここでは振動を考えているのだから、(3.49) の解は時間的に振動するものでなくてはならない。この事から $\lambda > 0$ でなくてはならないことが分かる。 $\lambda < 0$ なら、 T は $t \rightarrow \infty$ の極限で発散するかまたは 0 になるからである。

$$\rho = \sqrt{\lambda}r$$

と変換すると (3.54) は

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)R(\rho) + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2}\right)R(\rho) = 0 \quad (3.55)$$

となる。これは整数次のベッセル関数を与える微分方程式である。

(3.55) のベッセルの微分方程式は、 $\rho = 0$ を確定特異点とする 2 階線形常微分方程式であり、級数解の方法 (フロベニウスの方法) で解くことができる。2 階微分方程式である

から線形独立な解が 2 つ存在する。1 つは第 1 種のベッセル関数または (狭義の) ベッセル関数といい

$$J_n(\rho) = \left(\frac{\rho}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\rho/2)^{2k}}{k! \Gamma(n+k+1)} \quad (3.56)$$

と書かれる。 $\Gamma(m+1)$ はガンマ関数といい、0 または正整数 m に対しては $\Gamma(m+1) = m!$ である。もう 1 つの解は第 2 種ベッセル関数またはノイマン関数といい

$$\begin{aligned} N_n(\rho) &= \frac{2}{\pi} J_n(\rho) \left(\gamma + \ln \frac{\rho}{2}\right) \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \left(\frac{\rho}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k} \{\phi(n+k) + \phi(k)\} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k} \end{aligned} \quad (3.57)$$

である。ただし

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) \cong 0.57721 \dots, \text{ (オイラー一定数)}$$

$$\phi(m) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m}, \quad \phi(0) = 0$$

と定義する。ベッセル関数およびノイマン関数の振る舞いを図 3.5 に示しておく。今、我々にとって重要なのは $J_n(\rho)$ である。なぜならノイマン関数 $N_n(\rho)$ は $\rho \rightarrow 0$ で $-(1/\pi)(\rho/2)^{-n}(n-1)!$ によって発散し、振動の振幅としては受け入れられないからである。したがって解は

$$R(\rho) = AJ_n(\rho) = AJ_n(\sqrt{\lambda}r)$$

である。 $J_n(\rho)$ は図 3.5 で見るように、振幅を徐々に小さくしながら振動している。さらに n が大きくなるにしたがって外に押し出されていき、 $J_n(\rho)$ と $J_{n+1}(\rho)$ の零点は互いに他を分かちあっている。 $R(r)$ の境界条件としては

$$R(r=a) = AJ_n(\sqrt{\lambda}a) = 0 \quad (3.58)$$

が要求されている。($r=0$ で $N_n(\rho)$ を排除したのも、 $R(r=0)$ が有限という境界条件を用いたことになる。) いい換えると、 λ の値を適当に決めることで、 J_n の零点を $r=a$ にもってこなくてはならない。

////////////////////////////////////
 //////////////////////////////////////
 //////////////////////////////////////
 //////////////////////////////////////
 //////////////////////////////////////
 // 図 3.5 //////////////////////////////////////

////////////////////////////////////
 //////////////////////////////////////
 //////////////////////////////////////
 //////////////////////////////////////

$J_n(\rho)$ の k 番目の零点を ρ_k^n と書こう。 $n \neq 0$ の場合 $\rho = 0$ も零点である。これを除いて他の零点を順番づけし、 $0 < \rho_1^n < \rho_2^n < \dots$ とする。こうすれば (3.58) の要求は

$$\sqrt{\lambda}a = \rho_k^n, \quad i.e. \quad \lambda_k^n = (\rho_k^n/a)^2 \tag{3.59}$$

である。これが固有値を決める式であり、対応する固有関数は

$$R(r) = AJ_n(\rho_k^n \frac{r}{a}) \tag{3.60}$$

となる。

最後に、(3.59) で決まった λ_k^n を (3.49) に代入して、これを解くと

$$T(t) = g_1 e^{i\omega_{nk}t} + g_2 e^{-i\omega_{nk}t} \tag{3.61}$$

$$\omega_{nk} = \sqrt{\lambda_k^n}c = \frac{c}{a}\rho_k^n \tag{3.62}$$

となる。以上をまとめて書きなおすと、 A_{nk} を定数として

$$\begin{aligned} \Theta_n(\theta) &= \cos n(\theta - \theta_0) \\ R_{nk}(r) &= J_n(\rho_k^n \frac{r}{a}) \\ T_{nk}(t) &= \cos \omega_{nk}(t - t_0) \\ J_n(\rho_k^n) &= 0, \quad \omega_{nk} = \frac{c}{a}\rho_k^n \\ u(r, \theta, t) &= A_{nk}R_{nk}(r)\Theta_n(\theta)T_{nk}(t) \end{aligned} \tag{3.63}$$

である。図 3.6 に $R_{nk}(r)\Theta_n(\theta)$ の振る舞いを示した。 n, k を増すにしたがって振動数が増大し、さらに節の様子が複雑になる。節の数は動径 r 方向に $r = a$ を含めて k 個あり、角度 θ 方向には n 個の直径が節となっている。

////////////////////////////////////
 //////////////////////////////////////
 //////////////////////////////////////
 //////////////////////////////////////
 //////////////////////////////////////
 // 図 3.6 //////////////////////////////////////
 //////////////////////////////////////
 //////////////////////////////////////

////////////////////////////////////
 //////////////////////////////////////

例題 3.6 3次元球(半径 a)の表面を温度 0 に保った時の熱伝導の様子を説明せよ。

解. 3次元の熱伝導方程式は、例題 3.4 において変数分離法により (3.34) ~ (3.37) のように変形された。これを解けばよい。温度分布は、時間の経過とともに一様に 0 (境界 $r = a$ での値) に近づくはずだから、(3.34) の解は

$$T(t) = de^{-c\lambda t}, \lambda > 0 \quad (3.64)$$

である。このことを念頭に置いて、後で (3.34) を考える。(3.35) については、例題 3.5 と同様に

$$\Phi(\phi) = f \cos m(\phi - \phi_0), \kappa_m = m^2, (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.65)$$

と、固有値 κ_m および固有関数が定まる。ここでは境界条件 $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$ を用いた。

次に $\Theta(\theta)$ についての微分方程式 (3.36) を考察する。 $\kappa_m = m^2$ を代入して

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(\mu - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0. \quad (3.66)$$

ここで

$$\cos \theta = \omega$$

と変換すると

$$\frac{d}{d\omega} \left\{ (1 - \omega^2) \frac{d\Theta}{d\omega} \right\} + \left(\mu - \frac{m^2}{1 - \omega^2} \right) \Theta = 0 \quad (3.67)$$

となる。これをルジャンドルの陪微分方程式という。 $m = 0$ の時には、この微分方程式をルジャンドルの微分方程式という。(3.67) の微分方程式は、 $m \neq 0$ のときには $\omega = \pm 1$ を確定特異点とする超幾何微分方程式である。この解は $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ($-1 \leq \omega \leq 1$) ですなかな関数でなくてはならないことを念頭に置きつつ解を求めることにしよう。解を、 $\omega = \pm 1$ での特異性を考慮して

$$\Theta(\omega) = (1 - \omega^2)^s Q(\omega) \quad (3.68)$$

と仮定し、これを (3.67) に代入して $Q(\omega)$ の微分方程式を導くと

$$(1 - \omega^2) \frac{d^2 Q}{d\omega^2} - 2(1 + 2s)\omega \frac{dQ}{d\omega} + \left\{ (\mu - 2s) - \frac{m^2 - 4s^2\omega^2}{1 - \omega^2} \right\} Q = 0$$

となる。ここで $m^2 = 4s^2$ であれば、最後の $\{ \}$ の中の第 2 項で分母と分子が打ち消し合い、 $\omega = \pm 1$ は $Q(\omega)$ の正則点となる。したがって

$$s^2 = \frac{m^2}{4}$$

でなくてはならない。さらに $s = -|m|/2$ とすると、 $Q(\omega)$ は $\omega = \pm 1$ ですななお振る舞いをするが、(3.68) によって $\theta(\omega)$ は発散する。これも熱伝導方程式の解として物理的に受け入れられないので除外しなければならない。こうして

$$s = \frac{|m|}{2} \quad (3.69)$$

でなくてはならないことが分かる。このとき、 $Q(\omega)$ の方程式は

$$(1 - \omega^2) \frac{d^2 Q}{d\omega^2} - 2(|m| + 1)\omega \frac{dQ}{d\omega} + \{\mu - |m|(|m| + 1)\}Q = 0 \quad (3.70)$$

である。これは $\omega = 0$ を正則点とするので、 $\omega = 0$ の周りのテイラー級数

$$Q(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \omega^k \quad (3.71)$$

の形で解を求めることができる。(3.71) を (3.70) に代入し整理すると

$$\sum_{k=1}^{\infty} [(k+1)(k+2)c_{k+2} + \{\mu - k(k-1) - (|m|+1)(|m|+2k)\}c_k] \omega^k = 0$$

を得る。これが任意の ω について成立するためには、各 ω^k の係数がすべて 0 であることが必要であり、

$$c_{k+2} = -\frac{1}{(k+1)(k+2)} \{\mu - (k+|m|)(k+|m|+1)\}c_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.72)$$

となる。一般の μ については c_k は 0 になることはない。そのとき、

$$c_{k+2}/c_k \rightarrow 1, \quad (k \rightarrow \infty)$$

であるから、 $Q(\omega)$ は収束半径が 1 で、 $\omega = \pm 1$ で発散する無限級数となる。 $\omega = \pm 1$ は $\theta = 2n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) に対応する。このような $Q(\omega)$ の振る舞いは許されない。何故なら、極座標の z -軸方向は便宜的に決めているが、特別の方向ではなく、したがって $\theta = 2n\pi$ で $Q(\omega)$ が発散してよい理由はない。このことから (3.71) は途中の有限項で切れなくてはならない。

$$\mu = l(l+1) \quad (l = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.73)$$

であれば、 $k = l - |m|$ または $k = -l - |m| - 1$ の時、(3.72) の係数 $\{\mu - (k+|m|)(k+|m|+1)\} = 0$ となる。この k が偶数なら偶数次のベキが有限項で切れる。すなわち、(3.65) で定まった m に対して $k_0 = l - |m|$ 次のベキまでが残り、それから先は係数が

$$c_{k_0+2} = c_{k_0+4} = \dots = 0$$

となる。したがって

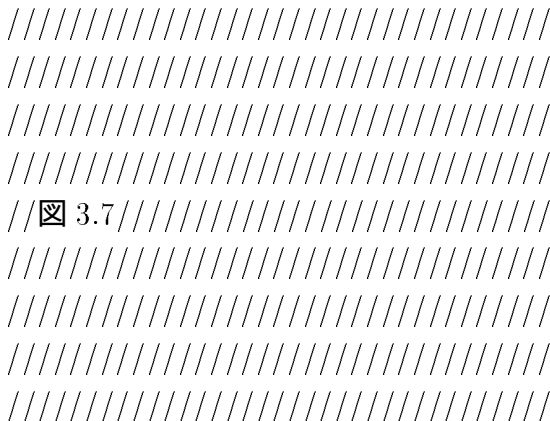
$$\begin{cases} k_0 = \text{偶数の場合} & : c_0 \neq 0, c_1 = 0 \\ k_0 = \text{奇数の場合} & : c_0 = 0, c_1 \neq 0 \end{cases}$$

と選べば、 $Q(\omega)$ は有限級数 (偶数次または奇数次のみからなる k_0 次の多項式) となり、無限遠点を除き ω の全域で正則となる。

ここで求めた多項式に適当な係数をかけたものをルジャンドルの陪関数といい、 $P_{lm}(\omega)$ と書く。具体的にそのいくつかを $m \geq 0$ の場合について書き下すと次のようなものである。

$$\begin{aligned} P_{00}(\omega) &= 1, \\ P_{10}(\omega) &= \omega, \\ P_{11}(\omega) &= (1 - \omega^2)^{1/2}, \\ P_{20}(\omega) &= \frac{1}{2}(3\omega^2 - 1), \\ P_{21}(\omega) &= 3(1 - \omega^2)^{1/2}\omega, \\ P_{22}(\omega) &= 3(1 - \omega^2), \\ P_{30}(\omega) &= \frac{1}{2}(5\omega^3 - 3\omega), \\ P_{31}(\omega) &= \frac{3}{2}(1 - \omega^2)^{1/2}(5\omega^2 - 1), \\ P_{32}(\omega) &= 15(1 - \omega^2)\omega, \\ P_{33}(\omega) &= 15(1 - \omega^2)^{3/2}, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.74}$$

$P_{lm}(\omega)$ の振る舞いを、図 3.7 に示しておく。



さてこれで $\Theta(\theta)$ が求まったから、次に $R(r)$ の式 (3.37) を考える。 $\mu = l(l+1)$ ($l = 0, 1, 2, \dots$) を代入して

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left(\lambda - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R = 0 \tag{3.75}$$

と書いておこう。熱伝導方程式については (3.64) で考えたように $\lambda > 0$ でなくてはならない。

$$\rho = \sqrt{\lambda r} \quad (3.76)$$

と変数変換すると

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(1 - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right) R = 0 \quad (3.77)$$

である。さらに

$$R(\rho) = \frac{Z(\rho)}{\sqrt{\rho}} \quad (3.78)$$

と変換すると (3.77) は

$$\frac{d^2 Z}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dZ}{d\rho} + \left\{1 - \frac{(l + \frac{1}{2})^2}{\rho^2}\right\} Z = 0 \quad (3.79)$$

となる。これはやはりベッセルの微分方程式であるが、(3.55) とは少し異なり、次数 n が $l + \frac{1}{2}$ に変わっている。これを半奇整数次のベッセル関数という。これらを $J_{l+\frac{1}{2}}(\rho)$ および $N_{l+\frac{1}{2}}(\rho)$ と書けば、解 (3.78) は

$$R(\rho) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} J_{l+\frac{1}{2}}(\rho) & \equiv j_l(\rho) \text{ または} \\ \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} N_{l+\frac{1}{2}}(\rho) & \equiv n_l(\rho) \end{cases}$$

と書かれる。 $j_l(\rho)$ は第 1 種球ベッセル関数、または (狭義の) 球ベッセル関数、 $n_l(\rho)$ を第 2 種球ベッセルまたは球ノイマン関数という。具体的な形を書いた方が分かり易い。

$$\begin{aligned} j_0(\rho) &= \rho^{-1} \sin \rho, \\ j_1(\rho) &= \rho^{-2} (\sin \rho - \rho \cos \rho), \\ j_2(\rho) &= \rho^{-3} \{(3 - \rho^2) \sin \rho - 3\rho \cos \rho\}, \\ &\vdots \\ n_0(\rho) &= -\rho^{-1} \cos \rho, \\ n_1(\rho) &= -\rho^{-2} (\cos \rho + \rho \sin \rho), \\ n_2(\rho) &= -\rho^{-3} \{(3 - \rho^2) \cos \rho + 3\rho \sin \rho\}, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.80)$$

一般的な形は

$$j_l(\rho) = (-1)^l \rho^l \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}\right)^l \frac{\sin \rho}{\rho}, \quad n_l(\rho) = (-1)^{l+1} \rho^l \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}\right)^l \frac{\cos \rho}{\rho}$$

である。 $\rho \approx 0$ の近傍では球ベッセル関数は

$$j_l(\rho) \sim \frac{\rho^l}{(2l+1)!!}, \quad n_l(\rho) \sim -\frac{(2l-1)!!}{\rho^{l+1}},$$

ただし

$$(2l+1)!! = (2l+1)(2l-1)\dots 3 \cdot 1, \quad 0!! = 1, \quad (-1)!! = 1$$

と振る舞う。したがって、 $R(\rho)$ としては $j_l(\rho)$ しか、解としては受け入れることができない。 $j_l(\rho), n_l(\rho)$ の振る舞いを図 3.8 に示しておこう。図から分かる様に、 $j_l(\rho)$ も無限個の零点をもっている。したがって境界条件

$$R(a) = A j_l(\sqrt{\lambda} a) = 0 \tag{3.81}$$

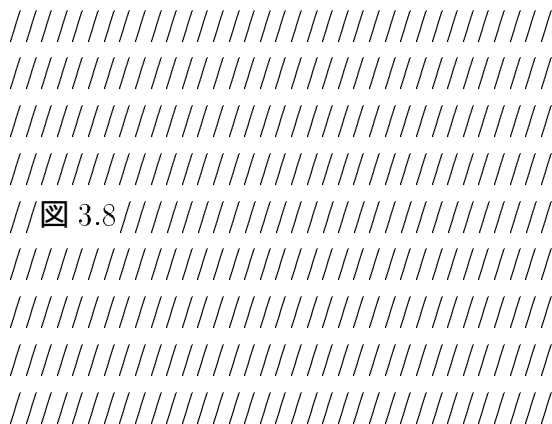
を満たす様に、定数 λ を定めることができる。すなわち $j_l(\rho)$ の $\rho = 0$ を除いた k 番目の零点を ρ_k^l

$$j_l(\rho_k^l) = 0, \quad 0 < \rho_1^l < \rho_2^l < \dots \tag{3.82}$$

とすると境界条件を満たす解 $R(r)$ は

$$R(r) = A j_l(\rho_k^l \frac{r}{a}), \quad \lambda_k^l = (\rho_k^l/a)^2 \tag{3.83}$$

となる。



最後にここで決まった固有値 λ_k^l が (3.64) に代入されてすべてが定まる。以上まとめると A_{lkm} を定数として

$$\begin{aligned} \Phi_m(\phi) &= \cos m(\phi - \phi_0), \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \\ \Theta_{lm}(\theta) &= P_{lm}(\cos \theta), \quad (l = 0, 1, 2, \dots; l \geq m) \\ R_{lk}(r) &= j_l(\rho_k^l \frac{r}{a}), \quad (k = 1, 2, \dots) \\ T_{lk}(t) &= e^{-c\lambda_k^l t}, \quad \lambda_k^l = (\rho_k^l/a)^2 \\ u(r, \theta, \phi, t) &= A_{lkm} R_{lk}(r) \Theta_{lm}(\theta) \Phi_m(\phi) T_{lk}(t) \end{aligned} \tag{3.84}$$

である。この様に、温度分布は複雑であるが、1つ1つを分解すれば単純で明解な振る舞いをする。定数は初期温度分布によって決められる。

本節で議論した固有関数と固有値の振る舞いは多くの微分方程式について一般的に成り立つことであり、それについては次章第4章で議論する。

3.3 重ね合わせの原理とフーリエ展開

これまで、いくつかの偏微分方程式を、与えられた境界条件の下で、変数分離法で解いてきた。しかし、固有値、固有関数を求めただけではまだ完全に問題を解いたことにはならない。例えば、振動・波動の問題で、波の初期の形にあわせて、解の形が決められていないからである。1次元の波動方程式を考えよう。

例題 3.7 長さ a ($0 \leq x \leq a$) で両端が固定された1次元の弦の振動で、初期条件

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = v_0(x) \quad (3.85)$$

を満たすものを求めよ。

解. ここでは変数分離

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (3.86)$$

の形で解を定めよう。(3.86) の $u(x, t)$ を1次元の振動方程式に代入し整理すると、例題 3.1 と同様に

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + c^2 \lambda T = 0 \quad (3.87)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda X = 0 \quad (3.88)$$

となる。境界条件は

$$X(0) = X(a) = 0 \quad (3.89)$$

である。 $\lambda \geq 0$ でないと (3.88) の解は、境界条件 (3.89) を満たすことができない。したがって、固有値 λ と対応する固有関数が、

$$\lambda^n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$X_n(x) = \sin \sqrt{\lambda^n} x = \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (3.90)$$

と定まる。この固有値 λ^n により、 $T(t)$ は

$$T_n(t) = f_1^n \sin \omega_n t + f_2^n \cos \omega_n t, \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{a} \quad (3.91)$$

となる。したがって、 $u(x, t)$ としては

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= T_n(t)X_n(x) \\ &= (f_1^n \sin \omega_n t + f_2^n \cos \omega_n t) \sin \frac{n\pi x}{a} \end{aligned} \quad (3.92)$$

が求められた。さてこのままでは (3.92) は一般的に与えられた初期条件 (3.85) を満足し得ない。

しかし、与えられた波動方程式は線形方程式であるから、 $u_n(x, t)$ を重ね合わせた (線形結合) ものも解である。すなわち、一般解は

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \sin \omega_n t + D_n \cos \omega_n t) \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (3.93)$$

の様に書くことができる。また $u_t(x, t)$ は

$$u_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \omega_n \cos \omega_n t - D_n \omega_n \sin \omega_n t) \sin \frac{n\pi x}{a}$$

である。これらから、係数 C_n, D_n を初期条件 (3.85) を満足するように

$$u(x, 0) = u_0(x) = \sum_n D_n \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (3.94)$$

$$u_t(x, 0) = v_0(x) = \sum_n C_n \omega_n \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (3.95)$$

と定めればよいことになる。我々の問題は結局、与えられた関数 $u_0(x), v_0(x)$ を (3.94), (3.95) の様に \sin 関数で展開することに帰着される。(3.94)(3.95) のような展開が可能であれば、両式に $\sin \frac{m\pi x}{a}$ をかけて $0 \leq x \leq a$ の範囲で積分すると

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{a\omega_n} \int_0^a dx v_0(x) \sin \frac{n\pi x}{a} \\ D_n &= \frac{2}{a} \int_0^a dx u_0(x) \sin \frac{n\pi x}{a} \end{aligned} \quad (3.96)$$

となる。ただし

$$\begin{aligned} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} dx &= \int_0^a dx \frac{1}{2} \left[\cos \frac{(m-n)\pi x}{a} - \cos \frac{(m+n)\pi x}{a} \right] \\ &= \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{a}{2} & m = n \end{cases} \end{aligned} \quad (3.97)$$

を用いた。これで、初期条件を満たすように、係数 C_n, D_n が定められたので、これを (3.93) に用いれば、解を得る。

以上の様にして、一般に与えられた境界条件と初期条件を満たすように解を求めることができる。(3.94) のような \sin 関数による展開をフーリエ・サイン展開という。2次元膜の振動も、 $t = 0$ での膜の形と速度が決まっていれば、同じ様にして完全な解を定めることができる。

例題 3.8 例題 3.1 で考えた長方形膜 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ で初め ($t = 0$) に変位が $u_0(x, y)$, 速度が 0 である場合の $t > 0$ における振動を定めよ。

解.ここでは解は一般的に (3.44)(3.46)(3.48) を用いて重ね合わせの原理により

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (C_{nm} \sin \omega_{nm} t + D_{nm} \cos \omega_{nm} t) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b},$$

$$\omega_{nm} = \sqrt{\left(\frac{n\pi c}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi c}{b}\right)^2} \quad (3.98)$$

とあらわされる。初期条件は

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) = \sum_{nm} D_{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (3.99)$$

$$u_t(x, y, 0) = 0 = \sum_{nm} C_{nm} \omega_{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (3.100)$$

である。(3.100) の条件から、

$$C_{nm} = 0 \quad (3.101)$$

でなければならない。(3.99) の条件から係数 D_{nm} が定められる。(3.97) の関係があるから D_{nm} は

$$D_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^a dx \int_0^b dy u_0(x, y) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (3.102)$$

と定められなくてはならない。 $u_0(x, y)$ の形によってはこの積分は困難かもしれないが、ともかくも解の形を、(3.102) の様にして書き下すことができた。

さらに同じ様にして円形膜の振動を論じることもしできる。

例題 3.9 例題 3.5 で論じた円形膜が、 $t = 0$ で変形 $u_0(r, \theta)$ であり初速度 0 であったとする。この膜はどのように運動するか。

解. (3.63) により、一般解は固有振動の重ね合わせ

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_k C_{nk} \cos \omega_{nk} (t - t_0) \cos n(\theta - \theta_0) J_n(\rho_k^n \frac{r}{a})$$

$$\omega_{nk} = \frac{c}{a} \rho_k^n, \quad J_n(\rho_k^n) = 0 \quad (3.103)$$

で与えられる。初期条件

$$u_t(r, \theta, 0) = 0 = - \sum_{nk} C_{nk} \omega_{nk} \sin \omega_{nk} \sin \omega_{nk} t_0 \cos n(\theta - \theta_0) J_n(\rho_k^n \frac{r}{a})$$

より $t_0 = 0$ でなくてはならない。さらに、もう 1 つの初期条件を

$$\begin{aligned} u(r, \theta, 0) &= u_0(r, \theta) = \sum_{nk} C_{nk} \cos n(\theta - \theta_0) J_n(\rho_k^n \frac{r}{a}) \\ &= \sum_{n,k} (A_{nk} \cos n\theta + B_{nk} \sin n\theta) J_n(\rho_k^n \frac{r}{a}) \end{aligned} \quad (3.104)$$

と書きなおすことにする。sin, cos 関数については、(3.97) と同じような関係

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin n\theta \sin m\theta d\theta &= \begin{cases} 0 & , n \neq m \\ \pi & , n = m \end{cases} \\ \int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos m\theta d\theta &= \begin{cases} 0 & , n \neq m \\ \pi & , n = m \end{cases} \\ \int_0^{2\pi} \sin n\theta \cos m\theta d\theta &= 0 \end{aligned} \quad (3.105)$$

がある。これを用いると (3.104) にさらに cos, sin 関数をかけて積分し、 A_{nk}, B_{nk} を

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta u_0(r, \theta) \cos n\theta &\equiv C_n(r) = \sum_k A_{nk} J_n(\rho_k^n \frac{r}{a}) \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta u_0(r, \theta) \sin n\theta &\equiv S_n(r) = \sum_k B_{nk} J_n(\rho_k^n \frac{r}{a}) \end{aligned} \quad (3.106)$$

と定めればよいことが分かる。

ベッセル関数には

$$\int_0^a dr r J_n(\rho_k^n \frac{r}{a}) J_n(\rho_l^n \frac{r}{a}) = 0, \quad (k \neq l) \quad (3.107)$$

という関係がある。これを用いると A_{nk}, B_{nk} は

$$\begin{aligned} A_{nk} &= \int_0^a C_n(r) J_n(\rho_k^n \frac{r}{a}) r dr / D_{nk} \\ B_{nk} &= \int_0^a S_n(r) J_n(\rho_k^n \frac{r}{a}) r dr / D_{nk} \\ D_{nk} &= \int_0^a \{J_n(\rho_k^n \frac{r}{a})\}^2 r dr \end{aligned} \quad (3.108)$$

と定められる。(3.106) の様な展開をフーリエ・ベッセル展開という。(3.108) の A_{nk}, B_{nk} を用いて、解は

$$\begin{aligned} u(r, \theta, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (A_{nk} \cos n\theta + B_{nk} \sin n\theta) J_n(\rho_k^n \frac{r}{a}) \cos \omega_{nk} t \\ \omega_{nk} &= \frac{c}{a} \rho_k^n, \quad J_n(\rho_k^n) = 0, \quad 0 < \rho_1^n < \rho_2^n < \rho_3^n < \dots \end{aligned} \quad (3.109)$$

と書き下される。ベッセル関数の直交関係、フーリエ・ベッセル展開に関してはこれ以上深くは述べない。詳しくは犬井鉄郎著「偏微分方程式とその応用」その他を参照してほしい。

