目 次

Chapter 1

物理現象と偏微分方程式

1.1　偏微分

一般に物理量は複数の変数に依存している。例えば電場 $\mathbf{E}$ や磁場 $\mathbf{H}$ あるいは力の場 $\mathbf{F}$ は時刻 t と空間の座標 $\mathbf{r}$ の関数であるベクトルである。また電位$\phi(\mathbf{r},t)$ や磁位$\phi_m(\mathbf{r},t)$ あるいは保存力 $\mathbf{F}$ に対するポテンシャル $V(\mathbf{r},t)$ などは、座標 $\mathbf{r}$ と時刻 t を定めればその値が定まるスカラー関数である。これら物理量は特別の点を除けば座標 $\mathbf{r}$ と時刻 t の滑らかな連続関数であり、微分を定義することができる。

x, y 2 つの変数により値が定まる関数 $f(x,y)$ を考えよう。2 つ以上の変数の関数について、他の変数は固定してただ 1 つの変数のみを変化させ、その変数に関して微分することを偏微分という。ある領域内の各点で

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \equiv f_x(x,y) \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \equiv f_y(x,y) \tag{1.2}$$

が一意的に定まるとき、これらをそれぞれ x または yによる偏微分係数または偏導関数という。偏微分の場合には通常の 1 変数の微分と区別して記号としては∂を用いる。これらの偏微分係数は x, yの関数である。高階の偏微分についても同様である。例えば

$$f(x,y) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{1.3}$$

とすると

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -\frac{x}{r^3}, \\ f_y(x,y) &= -\frac{y}{r^3}, \\ f_{xx}(x,y) &= \frac{\partial f_x}{\partial x} = -\frac{1}{r^3} + 3\frac{x^2}{r^5}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_{yy}(x,y) &= \frac{\partial f_y}{\partial y} = -\frac{1}{r^3} + 3\frac{y^2}{r^5}, \\
f_{xy}(x,y) &= \frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{3xy}{r^5}, \\
f_{yx}(x,y) &= \frac{\partial f_y}{\partial x} = \frac{3xy}{r^5}
\end{aligned}
$$

などとなる。

x と yが共に変化したときの連続関数 $f(x,y)$ の増分を dfと書くと

$$
df = f(x+dx, y+dy) - f(x,y) \tag{1.4}
$$

である。これは書き直すと

$$
df = f(x+dx, y+dy) - f(x, y+dy) + f(x, y+dy) - f(x,y)
$$

であるから、偏微分可能であれば

$$
\begin{aligned}
df &= \{f_x(x, y+dy) + \varepsilon_1\}dx + \{f_y(x,y) + \varepsilon_2\}dy \\
&= f_x(x, y+dy)dx + f_y(x,y)dy + \varepsilon_1 dx + \varepsilon_2 dy
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

となる。ここで f_x,f_yの連続性を仮定すれば、すなわち点 (x,y) の近傍で偏導関数が存在して連続ならば、dx,dyを 0 に近づけた時に ε_1,ε_2もともに 0 に近づく。このとき、$f(x,y)$ は（全）微分可能であるといい、1 次の微少量

$$
df = f_x dx + f_y dy \tag{1.6}
$$

を全微分という。

ある領域で f_{xy},f_{yx} が連続であるならば、その領域内で $f_{xy} = f_{yx}$ となる。このことを説明しよう。$f(x,y)$,$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ は連続であるとする。

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \{f(x+h, y+k) - f(x+h, y)\} - \{f(x, y+k) - f(x,y)\} \\
&= \varphi(x+h) - \varphi(x), \\
\varphi(x) &= f(x, y+k) - f(x,y)
\end{aligned} \tag{1.7}
$$

を考え、連続関数に関する平均値の定理を用いながら書き換えると

$$
\begin{aligned}
\Delta &= h\varphi_x(x+\theta_1 h) \\
&= hf_x(x+\theta_1 h, y+k) - hf_x(x+\theta_1 h, y) \\
&= hkf_{xy}(x+\theta_1 h, y+\theta_2 k), \quad (0 \le \theta_1, \theta_2 \le 1)
\end{aligned} \tag{1.8}
$$

となる。同じ式を

$$\Delta = \{f(x+h, y+k) - f(x, y+k)\} - \{f(x+h, y) - f(x, y)\}$$

と書きかえて平均値の定理を用いると

$$\begin{aligned} \Delta &= kf_y(x+h, y+\theta_2 k) - kf_y(x, y+\theta_2 k) \\ &= hkf_{yx}(x+\theta_1 h, y+\theta_2 k), \quad (0 \le \theta_1, \theta_2 \le 1) \end{aligned} \tag{1.9}$$

となる。f_{xy},f_{yx} が連続であるならば

$$\lim_{h,k\to 0} f_{xy}(x+\theta_1 h, y+\theta_2 k) = f_{xy}(x, y)$$

$$\lim_{h,k\to 0} f_{yx}(x+\theta_1 h, y+\theta_2 k) = f_{yx}(x, y)$$

が成り立つ。したがって

$$\lim_{h,k\to 0} \frac{\Delta}{hk} = f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y),$$

すなわち

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) \tag{1.10}$$

となるのである。

簡単な関数 $f(x, y)$ について、$f_{xy} = f_{yx}$が成り立たない例を見よう（ペアノによる例)。

$$f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq 0; \quad f(0, 0) = 0 \tag{1.11}$$

を考える。$(x, y) \neq (0, 0)$ では

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{y(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2} \\ f_y(x, y) &= \frac{x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} - \frac{4x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

となる。　$f_x(0, y) = -y$, $f_y(x, 0) = x$ であるからこれらは微分可能であり、

$$f_{xy}(0, 0) = -1, \quad f_{yx}(0, 0) = 1 \tag{1.12}$$

である。このように $f_{xy}(0, 0)$ と $f_{yx}(0, 0)$ とは値が一致しない。$(x, y) \neq (0, 0)$ とすれば

$$f_{xy}(x, y) = \frac{(x^2 - y^2)(x^4 + 10x^2y^2 + y^4)}{(x^2 + y^2)^3} \tag{1.13}$$

となる。この関数は $r=\sqrt{x^2+y^2}$ によらず $\theta=\tan^{-1}y/x$ だけの関数である。したがって x と yをどの様に 0 に近づけるかという極限のとり方で値が変わり、

$$\lim_{x,y\to 0} f_{xy}(x,y)$$

の値が定まらない。このため上の様に微分の順序により 2 つの値が異なる。$f_{xy}(x,y)$ が $(x,y)=(0,0)$ で連続でないからといってもよい。この事情は $f_{xy}(x,y)$ の振る舞いを図に示して見ればよく理解できる（ 図 1.1）。

//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//図 1.1//////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////

1.2　波動と波動方程式

両端を固定して張られた弦の横振動を考えよう。弦は太さと伸びは無視でき、線密度は ρ_0 であるとする。弦の静止長さ方向に測った位置 x における接線方向の張力を $T(x)$、振動方向の変位を $u(x,t)$ とすると、微小部分 x 〜$x+\delta x$ の運動方程式は

$$\rho_0\delta x\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=T(x+\delta x,t)\sin\alpha(x+\delta x,t)-T(x,t)\sin\alpha(x,t) \tag{1.14}$$

である（図 1.2）。ここで x における弦の接線方向の角度を α と表した。したがって

$$\tan\alpha(x,t)=\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \tag{1.15}$$

である。以下では微小振動を考えることにして $\alpha\approx 0$ であると仮定すれば

$$\sin\alpha\approx\tan\alpha \tag{1.16}$$

が成立する。このとき張力の長さ方向の成分は

$$T(x,t)\cos\alpha(x,t)\approx T(x,t)$$

である。弦が長さ方向に振動しないとすると長さ δx 部分に長さ方向の正味の力は働かないはずだから、

$$T(x,t) = T_0 \text{（一定）} \tag{1.17}$$

でなければならない。(1.14)~(1.17) により、 $c = \sqrt{T_0/\rho_0}$ とすると、長さ方向に振動しない弦の運動方程式は

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{1.18}$$

となる。これを波動方程式または振動方程式という。振動の伝播速度（音速）は c である。

///////////////////////////////////
///////////////////////////////////
///////////////////////////////////
///////////////////////////////////
//図 1.2///////////////////////////
///////////////////////////////////
///////////////////////////////////
///////////////////////////////////
///////////////////////////////////

ここでは境界条件としては、両端固定

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \tag{1.19}$$

を考えた。初期条件としては、時間に関して 2 階微分方程式であるから、たとえば

$$u(x,0) = u_0(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = v_0(x) \tag{1.20}$$

としなくてはならない。

境界条件は各部分の運動方程式 (1.18) そのものを求める際には何の役割もしていない。実際、両端または片端が自由な棒の振動方程式も、(1.18) と同じ方程式で与えられる。波動方程式 (1.18) は 2 階の偏微分方程式の 1 つの型である双曲型の典型的な例である。

波動方程式 (1.18) を

$$Du(x,t) = 0 \tag{1.21}$$

と書こう。この微分方程式を満たす解として独立な $u_1(x,t)$ と $u_2(x,t)$ があるとする。a_1, a_2 を定数とすると

$$u(x,t) = a_1 u_1(x,t) + a_2 u_2(x,t) \tag{1.22}$$

も同時に

$$Du(x,t) = D(a_1u_1 + a_2u_2) = a_1Du_1 + a_2Du_2 = 0 \tag{1.23}$$

を満足する。このような（偏）微分方程式を線形（偏）微分方程式という。線形性 (1.23) はまた「重ね合わせの原理」ともいい、重要な性質である。

波動方程式の解が、適当な初期条件および境界条件のもとで存在するとすれば、唯一つ定まることを示しておこう。波動方程式が線形偏微分方程式であることに注意すれば、2 つの独立な解 u_1 と u_2 が存在すると

$$U = u_1 - u_2 \tag{1.24}$$

もまた解であり初期条件

$$U(x,0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}U(x,0) = 0$$

および境界条件

$$U(0,t) = U(l,t) = 0 \quad :(\text{第 1 種境界条件})$$

または

$$\frac{\partial}{\partial x}U(0,t) = \frac{\partial}{\partial x}U(l,t) = 0 \quad :(\text{第 2 種境界条件})$$

を満足する。これは、境界条件として両端が固定され、あるいは両端の形が変化しないということであり、初期条件として全体が静止しているということである。この初期条件の下では外から力をかけない限り弦がひとりでに動き出すということはあり得ないから、以後も弦は静止したままである。すなわち

$$U(x,t) = 0, \quad 0 \le x \le l, \quad t \ge 0 \tag{1.25}$$

となり、したがって

$$u_1(x,t) = u_2(x,t)$$

である。

ここで述べたのは、力学のエネルギー保存の法則に他ならない。数式によって体裁を整えるなら、振動のエネルギー

$$E(t) \equiv \int_0^l dx \Big[\frac{1}{2}\rho_0(\frac{\partial U}{\partial t})^2 + \frac{1}{2}T_0(\frac{\partial U}{\partial x})^2\Big] \tag{1.26}$$

を考えて、これが時間によらず 0 であることをいえばよい。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(t) &= \int_0^l dx \Big[\rho_0\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + T_0\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial^2 U}{\partial t\partial x}\Big] \\ &= \int_0^l dx \Big[\rho_0\frac{\partial U}{\partial t}.\frac{T_0}{\rho_0}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + T_0\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t}\Big] \end{aligned} \tag{1.27}$$

と変形して部分積分を行えば、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(t) &= T_0\Big[\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=0}^{x=l} - \int_0^l dx \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + \int_0^l \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t}dx\Big] \\ &= T_0\Big[\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial x}\Big]_{x=0}^{x=l} = 0 \end{aligned} \tag{1.28}$$

となる。ここで、第 1 種では$\partial U/\partial t\Big|_{x=0,l} = 0$、第 2 種では$\partial U/\partial x\Big|_{x=0,l} = 0$ という境界条件を用いた。一方 $E(t)$ は $t = 0$ においては初期条件から

$$E(0) = 0$$

である。これらから $E(t)$ は時間によらず常に

$$E(t) = 0$$

となることが分かる。したがって x,t によらず

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

すなわち

$$U(x,t) \equiv 0 \tag{1.29}$$

となる。

例題 1.1 無限に長い 1 次元の系で、波動方程式 (1.18) を解いて一般解を求めよ。

解. 変数を x,t から ξ,η に

$$\xi = x + ct,\ \eta = x - ct \tag{1.30}$$

と変換する。

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = u_\xi + u_\eta, \\ u_t &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = c(u_\xi - u_\eta) \end{aligned} \tag{1.31}$$

さらに

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \\ u_{tt} &= c^2(u_{\xi\xi} - 2u_{\eta\xi} + u_{\eta\eta}) \end{aligned} \tag{1.32}$$

であるから (1.18) は

$$u_{\xi\eta} = 0 \tag{1.33}$$

となる。これを積分すれば、 F, G を任意の関数として

$$u = F(\xi) + G(\eta)$$

である。 (1.30) により元の変数 x, t に戻して

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct) \tag{1.34}$$

が一般解である。これをダランベールの解という。$x+ct$（または $x-ct$ ）が一定の場所は t の増加と共に x の負（正）の方向に移動していくから、F は x の負の方向に進行する波をあらわし G は x の正の方向に進行する波をあらわしている。さらにこの形から波動の形は時間がたっても変わらないことも分かる。変数変換 (1.30) が意味を持ち、(1.33) に任意性がないためには F, G が 2 階連続微分可能でなくてはならない。■

例題 1.2 例題 1.1 で初期条件

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = v_0(x) \tag{1.35}$$

を満たす解を求めよ。

解. 一般解は (1.34) で求められたから、関数 F, G が初期条件を満たすように定めればよい。

$$u_0(x) = F(x) + G(x),\ v_0(x) = c\{F'(x) - G'(x)\}.$$

したがって

$$F(x) = \frac{1}{2}[u_0(x) + \frac{1}{c}\int^x v_0(x')dx'],\ G(x) = \frac{1}{2}[u_0(x) - \frac{1}{c}\int^x v_0(x')dx'] \tag{1.36}$$

となる。まとめれば

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x+ct) + u_0(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(\xi)d\xi \tag{1.37}$$

が得られる。これをストークスの公式という。 $u(x,t)$ は 2 階連続微分可能でなくてはならないから、初期条件で与えられた関数 u_0 および v_0 はそれぞれ 2 回および 1 回連続微分可能でなくてはならない。■

例題 1.1 で時刻 $t=0$ に図 1.3 の様な形をした波を考えよう。この波は $x = \pm a$ と $x = 0$ でとがった折れ曲がりがあるからそこでは微分は定義されない。この波をその後静かに運動させると、初期条件の 1 つは

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)|_{t=0} = 0 \tag{1.38}$$

である。したがって波はその後

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\{u_0(x+ct) + u_0(x-ct)\} \tag{1.39}$$

で運動することになる。折れ曲がった初期の形が $u_0(x)$ である。波形の折れ曲がりはそのままの形で左右に伝播していく。このように、波動方程式には厳密な意味では偏微分方程式そのものは満足しないが、物理的に解として受け入れなくてはならない種類のものも存在する。

////////////////////////////////////
////////////////////////////////////
////////////////////////////////////
////////////////////////////////////
//図 1.3//////////////////////////
////////////////////////////////////
////////////////////////////////////
////////////////////////////////////
////////////////////////////////////

1.3 熱伝導現象と熱伝導方程式

1 次元的に伸びた棒の熱伝導現象を考えよう。比熱を c, 熱伝導率 κ, 密度ρ として棒は一様であるとする。長さ方向を x, 時刻を t とし、場所 x における時刻 t での温度を $u(x,t)$ とする。温度勾配は $u(x,t)$ の x による偏微分係数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ である。$x \sim x+\delta x$ の間の微小部分に流入する正味の熱量は、時間 δt の間に

$$\{\kappa\frac{\partial u}{\partial x}(x+\delta x,t)-\kappa\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\}\delta t=\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\delta x\delta t \tag{1.40}$$

となる。（図 1.4）これは一方で時間 δt 間の温度上昇$\frac{\partial u}{\partial t}\delta t$ と熱容量 $c\rho\delta x$ の積

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\delta x\delta t \tag{1.41}$$

に等しい。これから

$$\kappa\frac{\partial^2}{\partial x^2}\delta x\delta t=c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\delta x\delta t$$

すなわち

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\quad a=\frac{\kappa}{c\rho} \tag{1.42}$$

が成り立つ。これが熱伝導を支配する偏微分方程式で、熱伝導方程式または拡散方程式と呼ばれる。

////////////////////////////////////
////////////////////////////////////

///////////////////////////////////
///////////////////////////////////
//図 1.4//////////////////////////
///////////////////////////////////
///////////////////////////////////
///////////////////////////////////
///////////////////////////////////

別の議論によって熱伝導方程式を導くこともできる。空間 x および時間 t を各々間隔 Δx,Δt の格子に区切る。点 $x = l\Delta x, t = n\Delta t$ の格子点 (l, n) 上の熱密度を $P(l\Delta x, n\Delta t)$ とする。各格子点上の熱は時間が Δt だけ進んだとき、左右に等確率 $\frac{1}{2}$ で広がっていくとすると、それらは

$$P(l\Delta x, n\Delta t) = \frac{1}{2}\{P((l+1)\Delta x, (n-1)\Delta t) + P((l-1)\Delta x, (n-1)\Delta t)\} \tag{1.43}$$

と表される。これが 1 次元の拡散の基礎方程式である。したがって

$$\begin{aligned}&P(l\Delta x, (n+1)\Delta t) - P(l\Delta x, n\Delta t)\\ &= \frac{1}{2}\{P((l+1)\Delta x, n\Delta t) - 2P(l\Delta x, n\Delta t) + P((l-1)\Delta x, n\Delta t)\}\end{aligned}$$

となる。これらを $\Delta x, \Delta t$ で展開すると

$$\frac{\partial P}{\partial t}\Delta t = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(\Delta x)^2$$

を得る。格子間隔の関係を

$$\frac{1}{2}(\Delta x)^2 = a\Delta t \tag{1.44}$$

とすると、上式は

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) = a\frac{\partial^2}{\partial x^2}P(x,t) \tag{1.45}$$

となり、熱伝導方程式を得る。熱伝導方程式では、波動方程式のように初期の形が変わらずに伝導していくことはない。ここで出発に用いたように熱の密度の形が常に左右にくずれていくからである。

通常はこの方程式に境界条件を、たとえば棒の一端 $x = 0$ を 0 度、他端 $x = l$が温度θ に保ってあれば

$$u(0,t) = 0, u(l,t) = \theta\ \text{（境界条件）} \tag{1.46}$$

とし、さらに初期条件、たとえば時刻 $t = 0$ での温度分布が $u_0(x)$ であるならば

$$u(x,0) = u_0(x)\ \text{（初期条件）} \tag{1.47}$$

を課して考察することになる。熱伝導方程式は 2 階偏微分方程式の 1 つの型である放物型の典型である。

熱伝導方程式も線形偏微分方程式であり、解が存在するとすればそれらは与えられた初期条件と境界条件のもとで一意的に 定まる。線形独立な解 $u_1(x,t)$ と $u_2(x,t)$ が存在すると仮定しよう。このとき

$$U(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t) \tag{1.48}$$

とすると、 $U(x,t)$ は熱伝導方程式を満足し、さらに初期条件

$$U(x,0) = 0$$

および境界条件

$$U(0,t) = U(l,t) = 0$$

を満足する。すなわち、両端を 0 度の氷で冷やし、かつ全体を $t = 0$ の時に 0 度に保って、外からの熱の流入も外への熱の放出もないことになる。このような条件のもとでは、我々の日常生活の経験や物理法則により、棒は 0 度に保たれたままであることを知っている。したがって恒等的に

$$U(x,t) = 0 \tag{1.49}$$

に保たれる。すなわち x,t にかかわらず

$$u_1(x,t) = u_2(x,t) \tag{1.50}$$

が成り立つ。つまり解は 1 つに限られることが分かる。

これで示すべきことは充分であるが、少し数学的な形式を整えておこう。 $U(x,t)$ は熱伝導方程式

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

を満たすから、両辺に U を掛けて 0 から lまで積分すると

$$\int_0^l \frac{\partial U}{\partial t} U dx = a \int_0^l \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} U dx$$

となる。左辺の時間に関する微分を外に出し、また右辺は部分積分して $U(0,t) = U(l,t) = 0$ を用いると

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l U^2 dx = -a\int_0^l (\frac{\partial U}{\partial x})^2 dx \tag{1.51}$$

と変形される。ここで

$$G(t) \equiv \int_0^l U(x,t)^2 dx,\ G(0) = 0 \tag{1.52}$$

を定義すると、(1.51) は $G(t)$ が減少関数であることを示している。初期値 0 の非負減少関数であるから恒等的に

$$G(t) \equiv 0$$

でなくてはならない。被積分関数 $U(x,t)$ については

$$U(x,t) \equiv 0$$

となる。

1.4 ポテンシャル問題とラプラス方程式

2 次元空間に電荷密度 $Q(x,y)$ が分布しているとき、静電ポテンシャル $\phi(x,y)$ はポアソン方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi(x,y) = -\frac{1}{\varepsilon_0}Q(x,y) \tag{1.53}$$

で与えられる。 ε_0 は真空の誘電率である。もし考えている領域Ω内には電荷がなければ、ポテンシャル $\phi(x,y)$ を決める方程式は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi(x,y) = 0 \tag{1.54}$$

となる。これをラプラス方程式といい

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{1.55}$$

を（2 次元）ラプラス演算子、ラプラシアンという。

ラプラス方程式の意味を明らかにして、これを導いてみよう。2 次元空間 (x,y) を、x 方向にΔx、y方向にΔyの間隔で区切られた格子点の並びと考えよう。ただし格子間隔を

$$\Delta x = \Delta y \tag{1.56}$$

とする。電気力線の湧き出しおよび吸い込み口が電荷であるから、電荷がなければ、ある領域に入ってきた電気力線はそのまま領域の外へ抜けて行かなくてはならない。ポテンシャル ϕ は電気力線の密度であることに注意すると、格子点 $(n\Delta x, m\Delta y)$ 上のポテンシャルϕの値は、前後左右の 4 点 $((n\pm 1)\Delta x, m\Delta y), (n\Delta x, (m\pm 1)\Delta y)$ 上のポテンシャルの平均値に等しい。

$$\phi(x,y) = \frac{1}{4}\{\phi(x+\Delta x,y) + \phi(x-\Delta x,y) + \phi(x,y+\Delta y) + \phi(x,y-\Delta y)\}\ . \tag{1.57}$$

右辺を Δx, Δy に付いて展開すると、1 次の微少量は打ち消しあい、

$$\phi(x,y)+\frac{1}{4}\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x,y)(\Delta x)^2+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi(x,y)(\Delta y)^2\}$$

となる。$\Delta x=\Delta y$であるから、これらを (1.57) に代入して書き直せば

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})\phi(x,y)=0$$

となりラプラス方程式が得られる。

ラプラス方程式も 2 階偏微分方程式解の 1 つの典型で、楕円型と呼ばれる。またこれは線形偏微分方程式でもある。ラプラス方程式については与えられた領域の境界 $\partial\Omega$ で、境界条件

$$\phi(x,y)=\phi_0(x,y) \qquad on \quad \partial\Omega \tag{1.58}$$

を満たすように解を定めればよい。

ラプラス方程式 (1.54) の解は調和関数と呼ばれる。複素平面（ガウス平面）上で正則な関数 $f(z)$, $(z=x+iy)$ を実部 u と虚部 v に分けて $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ と書こう。このとき、u と v はコーシー・リーマンの関係式

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.59}$$

を満たさなくてはならない。(1.59) から u, または v を消去すると u および v は調和関数

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})u=0,\quad (\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})v=0 \tag{1.60}$$

であることが分かる。

ラプラス方程式の解が存在するとすれば一意的に決まることも容易に理解することができる。2 つの線形独立な解 ϕ_1,ϕ_2 が存在するとすると

$$\Phi=\phi_1-\phi_2 \tag{1.61}$$

も解である。またその境界条件は

$$\Phi(x,y)|_{\partial\Omega}=0 \tag{1.62}$$

である。これは物理的に見れば、電荷の無い閉じた空間で境界条件が (1.62) であるとき、ポテンシャルがどう決まるかということを問うていることになる。内部に電荷が無く境界ではゼロなのだから、内部の到るところで

$$\Phi(x,y)=0$$

すなわち

$$\phi_1(x,y) = \phi_2(x,y) \tag{1.63}$$

となる。

数学的にこれを表現するならば、調和関数は境界以外では最大値、最小値を取り得ないことを思い出せばよい。このことはまた、ラプラス演算子が周囲での値を平均する作用をしていることから理解できる。境界で Φ はすべて 0 であるからそれは領域の内部・境界を含めて最大値 $=$ 最小値 $= 0$ であるということになる。したがって $\Phi = 0$ でなくてはならない。

1.5　非線形偏微分方程式の例、K-dV 方程式

深さが一定 (h) の浅い水を考えよう。鉛直方向を y、水平方向を x, z とし、水の運動は z に依存しないとする。また水面は曲線 $y = u(x,t)$ で表されるとする。このような水の波は、粘性のない非圧縮性流体の渦なしの運動として記述することができる。（図 1.5）

//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//図 1.5//////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////
//////////////////////////////////

重力加速度を g とし $c_0 = \sqrt{gh}$ を用いて、変数を x, u より

$$\xi = x - c_0 t,\ u(x,t) = h + u^{(1)}(x,t) \tag{1.64}$$

に変更する。このとき、浅い水面のゆっくりした運動は

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} + \frac{3}{2}\frac{c_0}{h}u^{(1)}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{6}c_0 h^2 \frac{\partial^3 u^{(1)}}{\partial \xi^3} = 0 \tag{1.65}$$

と表すことができることが導かれる。さらに変数変換

$$a = \frac{2h}{3c_0}b,\ b = (\frac{c_0 h^2}{6\delta^2})^{1/3}, u^{(1)} = av,\ \xi = b\eta \tag{1.66}$$

を行うと、(1.65) は一般的な形

$$v_t + v v_\eta + \delta^2 v_{\eta\eta\eta} = 0 \tag{1.67}$$

に変換される。この非線形偏微分方程式を K-dV(Korteweg-deVries) 方程式という。系の非線形性は、境界条件に由来している。この偏微分方程式の特解として

$$\begin{aligned} v &= A\mathrm{sech}^2[(\eta - ct)/\Delta] \\ \Delta &= \delta\sqrt{\frac{12}{A}},\ c = \frac{A}{3} \end{aligned} \tag{1.68}$$

が存在する。この解の特徴は、波の形（A に依存する）と速度 $c_0 + bc$ が無関係でなく、大きな波は速く小さい波は遅いことである。この波は複数の波の衝突に対しても安定であり、ソリトンと呼ばれている。