

## 第9章

# 複素解析の応用

### 展望

本章では複素関数論を実際に使う場面で必要な事項あるいは応用上しばしば現われる事項で述べ残したが是非ふれておきたい事項などについてまとめておくことにしよう。

最初にガンマ関数およびベータ関数について述べる。これらの関数は物理学や工学においてしばしば現われるだけでなく、いわゆる特殊関数の積分表示や解析接続あるいは鞍点法や漸近展開の良い例になっている。有理型関数(5.4.3項)の部分分数展開や整関数の無限乗積表示は本論中で触れたかったことであるがいささか高度な話題であるので本章で少しだけ触れることで我慢した。楕円関数は、19世紀古典解析学の華ともいべき話題であるし、また多くの内容を含んでいる。楕円関数は、コマの運動、天体の運動、解析力学など力学の諸問題あるいは流体力学において壁に挟まれた流れの中の平板翼の問題などに現われる。しかし内容が高度なので、ここでは楕円積分を説明するにとどめる。楕円積分は楕円関数の逆関数であるから、楕円関数と同じ問題に現われる。本章では振り子の問題を例に挙げた。複素解析の応用としては、フーリエ逆変換、ラプラス逆変換は大きな分野である。工学の多くの分野、たとえば回路論、振動論あるいは制御論などでこれら積分変換は必須である。逆変換の公式を表で知るだけでなく是非その本質を数学的に理解し使いこなしてもらいたいと思う。

この章では扱わなかった応用分野も決して意義が少ないということではない。むしろ限られたページでは扱い切れないため最初からあきらめたものが多い。楕円関数の他にも、たとえば微分方程式の確定特異点の周りでの級数

解法(フロベニウスの方法) 超幾何関数論、関数近似および数値積分に関する誤差評価の理論など沢山の面白い話題がある。<sup>1</sup>これらについては是非その分野の専門書を手にとる機会を見つけてもらいたい。

## 9.1 ガンマ関数とベータ関数

### 9.1.1 ガンマ関数とその解析接続

次の積分表示で与えられる複素数  $z$  の関数

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (9.1)$$

を考えよう。これを(オイラーの)ガンマ( $\Gamma$ )関数といい、右辺の積分をオイラーの第2種積分という。

$z$ が正の実数  $z = x > 0$  であるなら部分積分して

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = -e^{-t} t^x \Big|_{t=0}^{\infty} + x \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = x\Gamma(x) \quad (9.2)$$

である。また  $x$  が0または正整数  $n$  の場合には

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1 \quad (9.3)$$

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt = n! \quad (9.4)$$

となる。ただし  $0! = 1$  とする。

$z$ が複素数の場合には  $0 < \varepsilon \leq \operatorname{Re} z \leq M < \infty$  であれば

$$0 < t \leq 1 \text{ のとき } |e^{-t} t^{z-1}| \leq e^{-t} t^{\varepsilon-1} \quad (9.5)$$

$$1 \leq t < \infty \text{ のとき } |e^{-t} t^{z-1}| \leq e^{-t} t^{M-1} \quad (9.6)$$

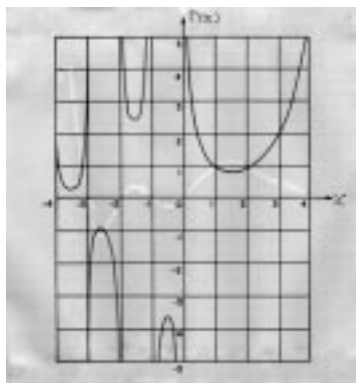
である。これらの評価式の積分

$$\int_0^1 e^{-t} t^{\varepsilon-1} dt, \quad \int_1^{\infty} e^{-t} t^{M-1} dt$$

はそれぞれ有限であるから、積分

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (9.7)$$

<sup>1</sup>級数解、超幾何関数論については、犬井鉄郎著「特殊関数」岩波全書(岩波書店)、関数近似、誤差評価の理論については、森正武著「数値解析」(共立出版)がよい。

図 9.1 ガンマ関数 $\Gamma(x)$ .

は、 $t \rightarrow 0$  のときにも  $t \rightarrow \infty$  のときにも、 $\varepsilon \leq \operatorname{Re} z \leq M$  で  $z$  に関して一様収束する。 $\varepsilon, M$  は任意であるから上の積分 (9.1) は  $\operatorname{Re} z > 0$  で一様に収束する。したがって  $\Gamma(z)$  は  $\operatorname{Re} z > 0$  で連続である。次に  $C$  を  $\operatorname{Re} z > 0$  の領域におけるジョルダン閉曲線であるとすると、上記一様収束性から

$$\oint_C dz \Gamma(z) = \int_0^\infty dt e^{-t} \oint_C dz t^{z-1} \quad (9.8)$$

である。コーシーの定理により  $\oint_C dz t^{z-1} = 0$  であるから

$$\oint_C dz \Gamma(z) = 0 \quad (9.9)$$

である。すなわち  $\Gamma(z)$  は  $\operatorname{Re} z > 0$  で正則である。したがって式 (9.2) を  $\operatorname{Re} z > 0$  に解析接続することができ

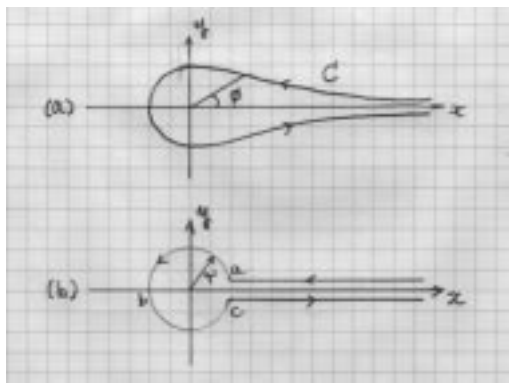
$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (9.10)$$

を得る。これを書き換えて

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} \quad (9.11)$$

とすると、右辺は  $\operatorname{Re}(z+1) > 0$  で有理型で  $z = 0$  を 1 位の極として持つ。(9.11) 式を用いることにより  $\Gamma(z)$  は  $0 > \operatorname{Re} z > -1$  に解析接続される。さらに  $0 > \operatorname{Re} z > -1$  に拡張された  $\Gamma$  関数を用いて式 (9.11) をながめれば  $\Gamma(z)$  は  $-1 > \operatorname{Re} z > -2$  に解析接続され  $z = -1$  を 1 位の極として持つ。

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)}$$

図 9.2 ガンマ関数の積分路  $C$ .

これをくり返すことにより  $\Gamma(z)$  は  $z$  平面全域に拡張され

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+3)}{z(z+1)(z+2)} = \cdots = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)} \quad (9.12)$$

を得る。ただし  $z = 0, -1, -2, \dots, -n, \dots$  は 1 位の極となる。上式より  $z = -n$  における留数は

$$\lim_{z \rightarrow -n} (z+n)\Gamma(z) = \frac{1}{(-n)(-n+1)\cdots(-1)} = \frac{(-1)^n}{n!} \quad (9.13)$$

であることがわかる。実軸上での  $\Gamma$  関数の振舞いを図 9.1 に示しておこう。

式 (9.1) の定義は  $\operatorname{Re} z > 0$  でなくてはならなかった。これを変更してすべての  $z$  に対して有効な  $\Gamma$  関数の積分表示式を導こう。図 9.2(a) の積分路  $C$  に沿って積分

$$I(z) = \int_C e^{-\zeta} \zeta^{z-1} d\zeta \quad (9.14)$$

を考える。  $\zeta = \rho e^{i\phi}$  として積分路  $C$  の上では  $\zeta^{z-1}$  は

$$\zeta^{z-1} = e^{(z-1)(\ln \rho + i\phi)} \quad (0 \leq \phi \leq 2\pi) \quad (9.15)$$

である。  $\zeta$ -平面上実軸の上側を実軸に沿って動くとき、  $\zeta$  の偏角は  $\phi = 0$  であると決める。ここで積分路  $C$  を連続的に変形して図 9.2(b) の積分路にしよう。

$$I(z) = \int_{\infty}^a + \int_{abc} + \int_c^{\infty} . \quad (9.16)$$

第1の積分は点a(座標 $(r, 0)$ )を原点Oに近づけると

$$\int_{\infty}^a = \int_{\infty}^r e^{-\rho} \rho^{z-1} d\rho \rightarrow -\Gamma(z) \quad (r \rightarrow 0) \quad (9.17)$$

となる。

第2の積分では $\zeta = re^{i\phi}$ ,  $d\zeta = ire^{i\phi}d\phi$ であるから

$$\begin{aligned} \int_{abc} &= \int_0^{2\pi} ire^{(z-1)\ln r} e^{-re^{i\phi}} e^{i(z-1)\phi} e^{i\phi} d\phi = ire^{(z-1)\ln r} \int_0^{2\pi} d\phi e^{-re^{i\phi}} e^{iz\phi} \\ &= ir^z \int_0^{2\pi} d\phi e^{-re^{i\phi}} e^{iz\phi} \end{aligned} \quad (9.18)$$

である。積分領域は $\operatorname{Re}z > 0$ であるから $\int_{abc} \rightarrow 0$  ( $r \rightarrow 0$ )である。

第3の積分の積分路上では、 $\zeta$ の偏角が $\phi = 2\pi$ であるから $\zeta^{z-1}$ は

$$\zeta^{z-1} = e^{(z-1)(\ln \rho + 2\pi i)} = \rho^{z-1} e^{2\pi i(z-1)} \quad (9.19)$$

である。したがって第3の積分は

$$\begin{aligned} \int_c^{\infty} &= \int_r^{\infty} d\rho e^{2\pi i} e^{-\rho} \rho^{z-1} e^{2\pi i(z-1)} \\ &= e^{2\pi iz} \int_r^{\infty} d\rho e^{-\rho} \rho^{z-1} \rightarrow e^{2\pi iz} \Gamma(z) \quad (r \rightarrow 0) \end{aligned} \quad (9.20)$$

となる。以上により $\operatorname{Re}z > 0$ では

$$I(z) = (e^{2\pi iz} - 1)\Gamma(z) = 2ie^{\pi iz} \sin \pi z \Gamma(z) \quad (9.21)$$

が示された。すなわち $I(z)/(2ie^{\pi iz} \sin \pi z)$ は $z$ の全域で定義され、 $\operatorname{Re}z > 0$ では $\Gamma(z)$ に等しい。よって $I(z)/(2ie^{\pi iz} \sin \pi z)$ は $\Gamma(z)$ の $z$ 全域への解析接続になっている。

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\pi iz}}{2i \sin \pi z} \int_C e^{-\zeta} \zeta^{z-1} d\zeta. \quad (9.22)$$

ただしこの式は $z = 0, 1, 2, \dots$ の時は成り立たない。

### 9.1.2 ベータ関数

ガンマ関数と関係の深い関数として

$$B(p, q) = \int_0^{\infty} \frac{x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}} dx \quad (\operatorname{Re}p, \operatorname{Re}q > 0) \quad (9.23)$$

がある。  $x = (1 - t)/t$  とおくと

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt \quad (9.24)$$

である。また  $t = 1 - s$  とすることにより、  $p$  と  $q$  が入れ替わり

$$B(p, q) = B(q, p) \quad (9.25)$$

となる。この関数をベータ関数、オイラーの第1種積分という。

第2種積分で  $t \rightarrow kt (k > 0)$  とすると

$$\frac{\Gamma(z)}{k^z} = \int_0^\infty e^{-kt} t^{z-1} dt \quad (9.26)$$

が得られる。ここで  $k = 1 + s$ ,  $z = p + q$  とすると

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+s)^{p+q}} = \int_0^\infty e^{-(1+s)t} t^{p+q-1} dt.$$

これに  $s^{p-1}$  をかけて  $s$  について 0 から  $\infty$  まで積分すると

$$\int_0^\infty ds \int_0^\infty dt e^{-(1+s)t} t^{p+q-1} s^{p-1} = \Gamma(p+q) \int_0^\infty \frac{s^{p-1}}{(1+s)^{p+q}} ds$$

である。書きなおして

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \int_0^\infty e^{-t} t^{q-1} dt \cdot \int_0^\infty e^{-st} (st)^{p-1} t ds = \Gamma(q)\Gamma(p) \\ \text{右辺} &= \Gamma(p+q)B(p, q), \end{aligned}$$

すなわち

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (9.27)$$

である。以上は  $\operatorname{Re} p, \operatorname{Re} q > 0$  と仮定したが、(9.27)式の右辺は  $p, q$  全域で定義されているから  $B(p, q)$  も  $p, q$  全域でこの式により決められる。

特に  $p = 1 - z$ ,  $q = z$ ,  $1 > \operatorname{Re} z > 0$  とすると

$$B(1-z, z) = \int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad (9.28)$$

である(第6章例46)。  $\Gamma(1) = 1$  に注意すると

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad (9.29)$$

となる。この式(9.29)は  $1 > \operatorname{Re} z > 0$  により求められたが、解析接続によりすべての  $z$  について成立する。また上式から  $\Gamma(z)$  は零点を持たないことも分かる。さらに(9.29)式で  $z = 1/2$  とすると直ちに

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (9.30)$$

であり、漸化式(9.10)により

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3}{2^2}\sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3}\sqrt{\pi}, \dots \quad (9.31)$$

が導かれる。

### 9.1.3 スターリングの公式とガンマ関数の漸近展開

$n$  が大きな正整数であるとき、 $n!$  の値は

$$n! \cong \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \quad (9.32)$$

と近似できる。この式をスターリング (Stirling) の公式という。これを導こう。(9.1)式

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt$$

で  $t = x\tau$  ( $x > 0$ ) として  $t$  から  $\tau$  に変換すると

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= x^{x+1} \int_0^{\infty} e^{-x\tau} \tau^x d\tau \\ &= x^{x+1} e^{-x} \int_0^{\infty} e^{-x(\tau-1-\ln \tau)} d\tau. \end{aligned} \quad (9.33)$$

$f(\tau) = \tau - 1 - \ln \tau$  とおくと

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= x^{x+1} e^{-x} I(x), \\ I(x) &= \int_0^{\infty} e^{-xf(\tau)} d\tau \end{aligned} \quad (9.34)$$

である。この積分(9.34)をよく見ると  $I(x)$  における積分は  $0 < \tau < \infty$  の全領域が同じ様に寄与しているのではないことが分かる。

$f(\tau)$  は図9.3のように変化する。 $x \gg 1$  のとき、 $e^{-xf(\tau)}$  は  $\tau = 1$  で極大値をとり、 $\tau = 1$  から離れると急激に0となる。したがって  $\tau = 1$  の近傍から

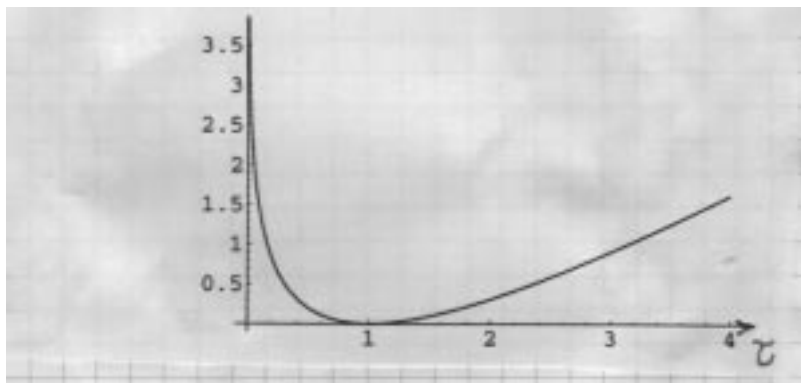


図 9.3  $f(\tau) = \tau - 1 - \ln \tau$  .

の寄与のみを正しく計算すればよい。このような評価の仕方を鞍点法という。  
 $f(\tau)$  を  $\tau = 1$  のまわりで展開し

$$f(\tau) = \frac{(\tau - 1)^2}{2} - \frac{(\tau - 1)^3}{3} + \frac{(\tau - 1)^4}{4} \dots \quad (9.35)$$

これから

$$\begin{aligned} I(x) &\approx \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \exp\left\{-\frac{x}{2}(\tau - 1)^2\right\} d\tau \\ &= \sqrt{\frac{2}{x}} \int_{-\varepsilon\sqrt{x/2}}^{\varepsilon\sqrt{x/2}} e^{-u^2} du \approx \sqrt{\frac{2}{x}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\frac{2\pi}{x}}. \end{aligned} \quad (9.36)$$

ここで  $\varepsilon$  は小さな正数であるが  $x$  は充分大きくて  $\varepsilon\sqrt{x/2} \rightarrow \infty$  としてよいと考えた。よって式 (9.34) (9.36) により

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x} \quad (x \gg 1) \quad (9.37)$$

を得る。  $x = n$  (正整数) とすると

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \quad (9.38)$$

となる。これがスターリングの公式である。  $f(\tau)$  の展開の高次まで用いると  $\Gamma(x)$  の  $x \gg 1$  における高次の展開式が次のように得られる。

$$\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi} x^{x-1/2} e^{-x} \left[ 1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51840x^3} - \frac{571}{2488320x^4} + \dots \right] \quad (9.39)$$



このような展開式を漸近展開という。漸近展開式については、最初のうちは項数を増やしていくと値はより正しく表現される。しかしこれには限界があって、その限界を超えて項数を増やしていくと値は正しい値から外れてくる。さらに無限項まで求めた級数の和が収束するとは限らない。

## 9.2 有理型関数の部分分数展開と整関数の無限乗積表示

### 9.2.1 有理型関数の部分分数展開

$g(z)$  は  $z$  の有限領域にある点  $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$  だけを 1 位の極として持ち他に特異点はない ( $b_j \neq 0$ )、すなわち 1 位の極しか持たない有理型関数であるとする。(有理型の定義は 5.4.3 参照。) 積分路  $C_R$  を原点を中心とした半径  $R$  の円周とし、すべての極は  $C_R$  の内側にくるとする。 $z$  は  $C_R$  の内側にあるとすると

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = g(z) + \sum_j \frac{B_j}{b_j - z} \quad (9.40)$$

となる。 $B_j$  は  $g(z)$  の  $b_j$  における留数である。

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} + \frac{z}{\zeta(\zeta - z)} \quad (9.41)$$

を (9.40) 式左辺に代入すると

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \frac{z}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{g(\zeta)}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta. \quad (9.42)$$

を得る。(9.40) で  $z = 0$  とすると

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta = g(0) + \sum_j \frac{B_j}{b_j} \quad (9.43)$$

となる。また  $g(z)$  は  $C_R$  内で 1 位の極しか持たないから

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{g(\zeta)}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta = 0 \quad (9.44)$$

である。以上(9.40)(9.42)~(9.44)から

$$g(z) = g(0) + \sum_j B_j \left\{ \frac{1}{z - b_j} + \frac{1}{b_j} \right\} \quad (9.45)$$

が得られる。逆に  $g(z)$  が上式の形で書かれ、 $b_j$  以外の各点の近傍で正則するならば  $g(z)$  は  $z = b_j$  を 1 位の極とする有理型関数である。

例 60

$$g(z) = \cot z - \frac{1}{z} \quad (9.46)$$

は  $z_k = k\pi (k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$  を 1 位の極としてもち、留数はすべて 1 である。

$$B_k = \frac{\cos z}{d \sin z / dz} \Big|_{z=z_k} = 1 \quad (9.47)$$

また  $g(0) = 0$ , よって

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{k=-\infty (\neq 0)}^{\infty} \left( \frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}. \quad (9.48)$$

## 9.2.2 整関数の無限乗積表示

数列  $\{a_n\}$  があるとき

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = (1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) \cdots \quad (9.49)$$

を無限乗積という。 $z$  の有限領域で正則な関数 ( 整関数、3.1.1 参照 )  $f(z)$  が無限に多くの 1 位のゼロ点  $a_1, a_2, \dots$  を持ち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty \quad (9.50)$$

であるとする。このとき  $f(z)$  は無限乗積を用いて

$$f(z) = f(0) e^{\{f'(0)/f(0)\}z} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left( 1 - \frac{z}{a_n} \right) e^{z/a_n} \right\} \quad (9.51)$$

と表される。逆に右辺が各点の近傍で一様収束するとすると  $f(z)$  は  $a_n$  に 1 位の 0 点を持つ正則関数 ( 整関数 ) である。

有理型関数の部分分数展開の結果を元に整関数  $f(z)$  について  $f'(z)/f(z)$  を考える。 $a_1, \dots, a_n, \dots$  は  $f(z)$  の 1 位の 0 点であるから、 $f'(z)/f(z)$  は  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  を 1 位の極としそこでの留数は 1 である。故に (9.45) を用いると

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{f'(0)}{f(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} \right). \quad (9.52)$$

これを積分すると

$$\log f(z) = \frac{f'(0)}{f(0)} z + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \log \left( 1 - \frac{z}{a_n} \right) + \frac{z}{a_n} \right\} + \text{定数} \quad (9.53)$$

である。よって

$$f(z) = A e^{(f'(0)/f(0))z} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left( 1 - \frac{z}{a_n} \right) e^{z/a_n} \right\}. \quad (9.54)$$

$z = 0$  とすると右辺 =  $A$  となる。したがって整関数  $f(z)$  の無限乗積表示

$$f(z) = f(0) e^{(f'(0)/f(0))z} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left( 1 - \frac{z}{a_n} \right) e^{z/a_n} \right\} \quad (9.55)$$

を得る。

例 61

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} \quad (9.56)$$

は  $z_k = k\pi (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$  を 1 位の 0 点とする。 $f(0) = 1, f'(0) = 0$  であるから

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2} \right). \quad (9.57)$$

### 9.3 楕円積分および楕円関数

関数  $e^z$  は  $e^{z+2\pi i} = e^z$  を満たす。このとき  $2\pi i$  を  $e^z$  の周期という。一般に或る領域内で定義された関数  $f(z)$  が、領域内の任意の  $z$  に対して

$$f(z + \omega) = f(z) \quad (9.58)$$

を満たすとき、 $\omega$ を  $f(z)$  の周期という。 $\omega$ が周期なら  $-\omega, \pm 2\omega, \pm 3\omega, \dots$  も  $f(z)$  の周期である。すべての周期がある周期  $\omega$  の整数倍 ( $\pm\omega, \pm 2\omega, \dots$ ) であらわされるとき、 $f(z)$  を単一周期関数、 $\omega$  を基本周期という。互いに互いの整数倍で表せない2つの複素数  $\omega_1, \omega_2$  があって、それらが  $f(z)$  の周期でありかついかなる他の周期でも表せないとき、 $f(z)$  を2重周期関数という。このとき、 $m_1, m_2$  を正負の整数として

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \quad (9.59)$$

は  $f(z)$  の周期となる。すべての周期がこのように表されるとき、 $\omega_1, \omega_2$  を基本周期という。 $f(z)$  が  $z$  平面の有限な領域において極以外の特異点を持たない ( $|z| < \infty$  で有理型) 二重周期関数であるとき、 $f(z)$  を楕円関数という。

$g(z)$  を  $z$  の4次または3次多項式、 $R$  を有理式とすると

$$\int R(z, \sqrt{g(z)}) dz \quad (9.60)$$

の形の積分を考えよう。この積分を楕円積分という。ただし  $g(z) = 0$  は重根をもたないとする。たとえば

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad (\text{第1種楕円積分}) \quad (9.61)$$

$$\int_0^z \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}} dz \quad (\text{第2種楕円積分}) \quad (9.62)$$

$$\int_0^z \frac{dz}{(z^2-n^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad (k \neq 0) \quad (\text{第3種楕円積分}) \quad (9.63)$$

などである。これらを多価関数の積分と見れば、第6章例46でシュワルツ・クリストフェルの公式として考えたものと同じように考えればよい。

楕円積分は物理学の問題ではしばしば現われる。単振り子(重さを無視できる細い棒の端に質点がついている振り子)の問題を考えてみよう。図9.4のように角度  $\phi$  をとり、端につけられた質点(質量  $m$ ) の  $\phi = 0$  での速度を  $v_0 = l\omega_0$  ( $l$  は固定点  $O$  と質点とを結ぶ軽い棒の長さ、 $\omega_0$  は回転の角速度)、重力加速度を  $g$ 、時間を  $t$  とする。この系の運動方程式は

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \phi \quad (9.64)$$

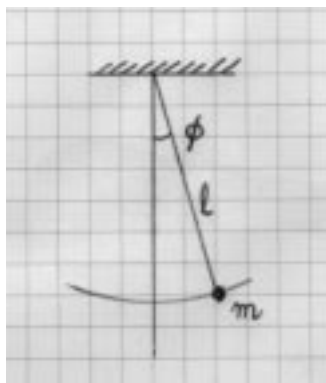


図 9.4 単振り子.

である。 $v_0^2 < 4gl$  の時は振子が振動する。この場合に話を限ることにし、振れの最大角度を $\alpha$ とすると $\alpha$ は

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{v_0^2}{4gl} \quad (9.65)$$

である。また

$$k = \sin \frac{\alpha}{2}, \quad \sin \frac{\phi}{2} = kz \quad (9.66)$$

と  $z$  を定義すると振動の周期は

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad (9.67)$$

である。こうして第 1 種楕円積分が現われる。

楕円積分

$$u(z) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad (9.68)$$

の性質を調べよう。被積分関数

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad (9.69)$$

は

$$z = 1, \quad -1, \quad \frac{1}{k}, \quad -\frac{1}{k} \quad (9.70)$$

を分岐点とする2価関数である。

積分路  $(0 \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow 0)$  が図 9.5a のように  $0, 1$  をまわるものとする。原点  $0$  から  $a$  までの積分路上で、出発点  $z \sim 0$  での  $f(z)$  の偏角を  $0$  と定義する。

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (9.71)$$

とすると

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^a f(z) dz = K \quad (9.72)$$

である。さらに  $1$  をまわって  $c$  から原点に戻ったとき  $z \sim 0$  での  $f(z)$  の偏角は  $2\pi/2 = \pi$  である。<sup>2</sup> したがって

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_c^0 f(z) dz = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_a^0 \{-f(z)\} dz = K. \quad (9.73)$$

また円周  $abc$  上では  $\rho \rightarrow 0$  とすると

$$\left| \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{abc} f(z) dz \right| \sim \rho^{1/2} \rightarrow 0 \quad (9.74)$$

となる。以上により

$$\int_{0 \rightarrow 1 \rightarrow 0} f(z) dz = 2K \quad (9.75)$$

である。

図 9.5b のように原点から分岐点  $1/k$  をまわる積分路を考えよう。再び出発時に原点近傍での  $f(z)$  の偏角を  $0$  とし、

$$L = \int_0^{1/k} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad (9.76)$$

とすると

$$\int_{0 \rightarrow \frac{1}{k} \rightarrow 0} f(z) dz = 2L \quad (9.77)$$

である。

<sup>2</sup>分岐点  $1$  のみをまわりその他の分岐点による偏角の変化はない。

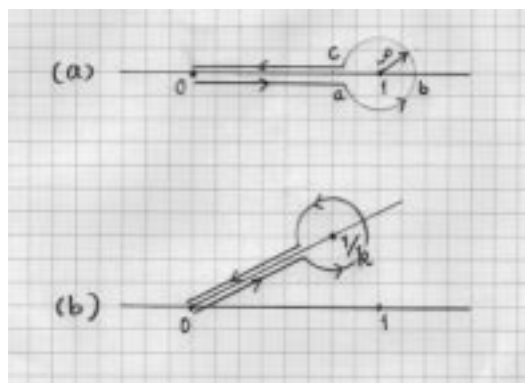


図 9.5 楕円積分の基本周期を与える積分路.

次に原点(近傍で  $f(z)$  の偏角を 0 とする)から図 9.5a の積分路をまわり、続けて図 9.5b の積分路をまわって原点に戻るとする。この時、図 9.5b に入るときの  $z = 0$  の近傍での  $f(z)$  の偏角は  $\pi$  である。このことから

$$\int_{0 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow \frac{1}{k} \rightarrow 0} f(z) dz = 2K - 2L \quad (9.78)$$

となる。原点を出発点として  $-1$  をまわって戻る積分の寄与、原点を出発点として  $-1/k$  をまわって戻る積分の寄与も、それぞれ出発点  $z \sim 0$  での  $f(z)$  の偏角の値に依存して  $\pm 2K, \pm 2L$  をとる。

いま、 $z \sim 0$  での出発点での  $f(z)$  の偏角は 0 とし、0 から  $z$  まで分岐点のどれもまわらず直接積分したときの値を  $u(z)$  とする。

$$u(z) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}. \quad (9.79)$$

そうすれば、 $z \sim 0$  での出発点での  $f(z)$  の偏角を 0 とし、 $z = 0$  から出発して 1 をまわり  $z$  に至る積分は  $2K - u(z)$ 、また  $0 \rightarrow z$  の積分の前に 1 をまわる積分をつけ加えれば  $-2K + u(z)$  などとなる。一般に  $u(z)$  の逆関数を

$$z = sn(u) \quad (9.80)$$

と書くとこれは  $2K, 2L$  を基本周期とする 2 重周期関数となる。したがって逆関数  $sn(u)$  は楕円関数である。

## 9.4 弾性体力学への応用: 薄板の応力場と重調和関数

ラプラシアン $\Delta$ を用いて

$$\Delta\Delta u = 0 \quad (9.81)$$

を満たす関数  $u$  を重調和関数という。ただし  $u$  は有界単連結領域で4階の偏導関数まで連続であるとする。2次元の問題であれば、ラプラシアン $\Delta$ は

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (9.82)$$

であるから、重調和関数  $u(x, y)$  の満たす式 (9.81) は

$$\Delta\Delta u(x, y) = \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) u(x, y) = 0 \quad (9.83)$$

である。

一般に重調和関数はどのように書くことができるのか考察しよう。

$$\Delta u(x, y) = p(x, y) \quad (9.84)$$

は調和関数である。 $p(x, y)$  と共役な調和関数を  $q(x, y)$  と書くと

$$f(x, y) = p(x, y) + iq(x, y) \quad (9.85)$$

は  $z = x + iy$  の正則関数である。これを積分したもう一つの正則関数

$$\phi(z) = \frac{1}{4} \int^z f(z) dz = r(x, y) + is(x, y) \quad (9.86)$$

を作る。 $r(x, y), s(x, y)$  は調和関数であるから

$$\Delta r = \Delta s = 0 \quad (9.87)$$

であり、またコーシー・リーマンの関係式から

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{1}{4} \operatorname{Re}(f(z)) = \frac{1}{4} p(x, y) \quad (9.88)$$

である。

$$p_1(x, y) = u(x, y) - \{r(x, y)x + s(x, y)y\} \quad (9.89)$$



を定義すると

$$\begin{aligned}\Delta p_1 &= \Delta(u - rx - sy) = p - 2\frac{\partial r}{\partial x} - 2\frac{\partial s}{\partial y} \\ &= 0\end{aligned}\quad (9.90)$$

であるから  $p_1$  も調和関数となる。 $p_1$  に共役な調和関数を  $q_1$  とし、正則関数

$$\psi(z) = p_1 + iq_1 \quad (9.91)$$

を定義する。上で定義した  $\phi(z)$  と  $\psi(z)$  を用いて  $u(x, y)$  を表すと

$$\begin{aligned}u(x, y) &= (rx + sy) + p_1 = \operatorname{Re}\{(x - iy)(r + is)\} + \operatorname{Re}\{\psi\} \\ &= \operatorname{Re}\{\bar{z}\phi(z) + \psi(z)\}\end{aligned}\quad (9.92)$$

を得る。

逆に  $\phi(z)$ ,  $\psi(z)$  を任意の正則関数として

$$u(z) = \operatorname{Re}\{\bar{z}\phi(z) + \psi(z)\} \quad (9.93)$$

を定義しよう。

$$\begin{aligned}\Delta u &= \operatorname{Re}\{\Delta(\bar{z}\phi) + \Delta\psi\} = \operatorname{Re}\Delta(\bar{z}\phi) \\ &= \operatorname{Re}\left[2\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\phi + \bar{z}\Delta\phi\right] \\ &= \operatorname{Re}2\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\phi\end{aligned}\quad (9.94)$$

$$\Delta\Delta u = \operatorname{Re}2\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\Delta\phi = 0 \quad (9.95)$$

であるから、上で定義した  $u(z)$  は重調和関数である。こうして、2次元の問題では重調和関数は任意の2つの調和関数から作りあげることができる。

重調和関数は弾性体の釣り合い方程式の議論で広い応用分野を持つ。弾性体の内部に働く力には2種類のものがある。第一は体積力(物体力)といい弾性体内の物質に外部から働く遠距離力で、重力や電磁気力である。これは弾性体の単位体積当たりの力として表される。第二は表面力といわれるもので、弾性体内部に仮想的に考えた微少部分領域の表面を通して作用する近距離力である。以下では第一の体積力はないとする。この時は面積  $\Delta S$  に働く力

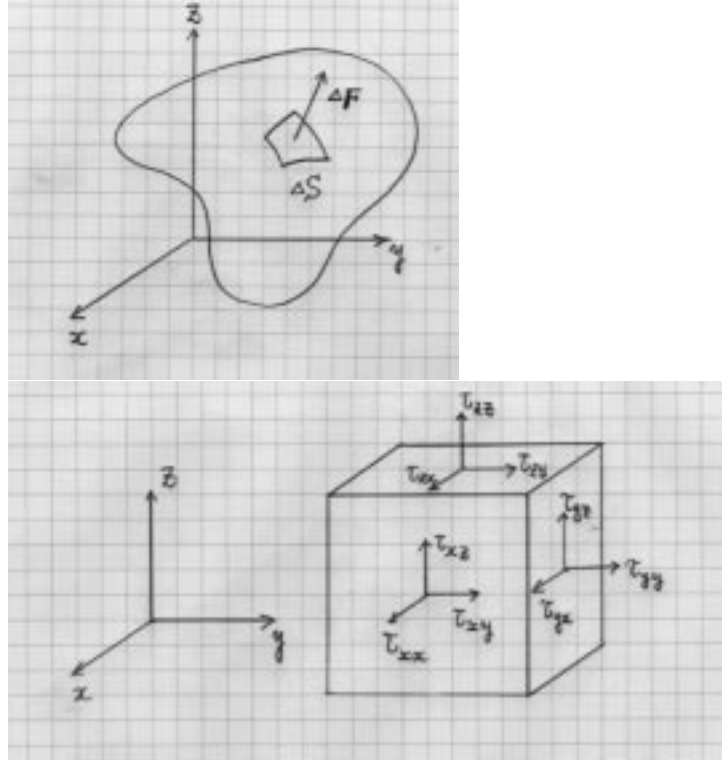


図 9.6 面積 $\Delta S$ に働く力 $\Delta F$ (a) および応力の各成分 (b).

$\Delta F$ を考える (図 9.6)。 $\Delta F$ は面積 $\Delta S_k$ に比例するので (力/面積 の次元を持つ量)  $\mathbf{T}_k = (\tau_{kx}, \tau_{ky}, \tau_{kz})$  を考える。

$$\mathbf{T}_k = \frac{d\mathbf{F}}{dS_k} \quad (9.96)$$

これを応力ベクトルという。ここで添え字  $k$  は  $x, y, z$  をあらわし、 $\Delta S_x$  は法線が  $x$  軸の正の方向を持つ微小表面を表す。応力ベクトルが定義でき、「連続弾性体内部の仮想的な閉局面内部の部分に働く応力ベクトルの作用が、外部から弾性体内部への作用に等しい」という仮定を、オイラー・コーシーの応力原理という。以下、この仮定が成り立っているとする。

応力成分の $\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{zz}$ を垂直応力、 $\tau_{xy}, \tau_{yz}$ などをせん断応力という。また垂直応力を $\sigma_x = \tau_{xx}$ などと書く。物体が釣合いの状態にあるとき内部応力はどこでも

$$\sum_k \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (9.97)$$

を満足する。さらに微小要素が釣り合いの状態にあるためには回転のモーメントもゼロにならなくてはならない。このためには

$$\tau_{ik} = \tau_{ki} \quad (9.98)$$

が成り立つことが必要である。

$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$  であるような薄板の場合には釣り合いの方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (9.99)$$

となる。もし応力  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  が任意の関数  $\Phi(x, y)$  によって

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (9.100)$$

と書かれるなら、釣り合いの方程式(9.99)は自動的にみたされる。応力下で弾性体に変形を受けても、弾性体内部に隙間や重なりが生じないという条件(適合条件という)から、さらに応力場は方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \nu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \nu \sigma_x) = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (9.101)$$

を満たさなくてはならない。<sup>3</sup>  $\nu$ は縦伸びと横伸びの比で、ポアソン比という。(9.100)を(9.101)に代入すれば、 $\Phi(x, y)$ は重調和関数であることが容易に確かめられる。

$$\Delta \Delta \Phi(x, y) = \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \Phi(x, y) = 0 \quad (9.102)$$

である。ここに現われた  $\Phi(x, y)$  を Airy の応力関数という。

<sup>3</sup>「連続体の力学入門」Y.C. ファン著(培風館)

## 9.5 微分方程式の初期値・境界値問題への応用：フーリエ変換とラプラス変換

### 9.5.1 フーリエ変換

実関数  $f(x)$  は  $(-\infty, \infty)$  において絶対可積分すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)| < \infty \quad (9.103)$$

かつ、 $(-\infty, \infty)$  の任意有限区間で有界変動であるとする。<sup>4</sup>

$$F(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi f(\xi) e^{-ik\xi} \equiv \mathcal{F}[f(x)] \quad (9.104)$$

をフーリエ変換という。  $F(k)$  をもう一度変換すると

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} F(k) \equiv \mathcal{F}^{-1}[F(k)] \quad (9.105)$$

が満たされる。  $x$  が  $f(x)$  の連続点ならば

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} F(k) = \mathcal{F}^{-1}[F(k)] \quad (9.106)$$

である。(9.105) をフーリエ逆変換という。フーリエ逆変換には複素関数論の知識が大変役に立つ。

例 62  $\exp(-a|x|)$ ,  $a > 0$  のフーリエ変換は次のように計算できる。

$$F(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-a|x|} e^{-ikx} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{a+ik} + \frac{1}{a-ik} \right\} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a}{(a^2+k^2)} \quad (9.107)$$

フーリエ逆変換は次の積分を計算すればよい。

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} F(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \left\{ \frac{1}{k-ia} - \frac{1}{k+ia} \right\}. \quad (9.108)$$

複素  $k$  平面で考えて、ジョルダンの補題により  $x > 0$  の時には上半平面で、 $x < 0$  の時には下半平面でこの積分路を閉じて、留数を計算すればよい。そ

<sup>4</sup>有界変動の定義については高木貞二著「解析概論」39節を参照せよ。また「解析概論」第6章も参照するとよい。ここでは、フーリエ変換およびラプラス変換それ自身については、すでに知っていることを前提にして、積分変換における複素積分についてだけに話題を限ることとする。

れぞれの場合に寄与する極は  $ia$  または  $-ia$  である。積分路は複素  $k$  平面上で  $k$  の偏角の増す正の方向 ( $x > 0$ ) または偏角が減る負の方向 ( $x < 0$ ) にまわっているから次のようになる。

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \times \left\{ \begin{array}{ll} (+2\pi i)e^{-ax} & : x > 0 \\ -(-2\pi i)e^{ax} & : x < 0 \end{array} \right\} = e^{-a|x|}. \quad (9.109)$$

例 63  $\exp(-\frac{1}{2}a^2x^2)$  のフーリエ変換を計算する。

$$F(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}a^2x^2 - ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}a^2(x + \frac{ik}{a^2})^2 - \frac{k^2}{2a^2}} \quad (9.110)$$

この積分はすでに第 6 章例 43 で行なった。

$$F(k) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{k^2}{2a^2}\right). \quad (9.111)$$

これからガウス関数のフーリエ変換はガウス関数であることが分かる。フーリエ逆変換は全く同様に行うことができ、元に戻ることも示される。

例 64  $(d/dx)f(x)$  のフーリエ変換を行なう。ただし  $f(x)$  は連続でかつ  $|x| \rightarrow \infty$  としたとき、任意の  $N$  に対して  $|x|^{-N}$  より早く  $0$  となるとする。 $f(x)$  のフーリエ変換  $F(k)$  を

$$F(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x) \quad (9.112)$$

と定義する。部分積分を用いて

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \frac{df(x)}{dx} &= \frac{1}{2\pi} [e^{ikx} f(x)]_{x=-\infty}^{x=\infty} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{de^{-ikx}}{dx} f(x) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx (-ik) e^{-ikx} f(x) \\ &= ik \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x) = ikF(k). \end{aligned} \quad (9.113)$$

を得る。また逆変換は

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} ikF(k) = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} F(k) = \frac{d}{dx} f(x) \quad (9.114)$$

である。 $ixf(x)$  のフーリエ変換に関しても

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} ix f(x) &= -\frac{d}{dk} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x) \\ &= -\frac{d}{dk} F(k) \end{aligned} \quad (9.115)$$

となる。これらの結果を用いると、微分方程式をフーリエ変換で容易に解けることがある。

例64の結果を少し一般的に書くと次の様な重要な結果になる。

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f^{(n)}(x) = (ik)^n \mathcal{F}[f(x)], \quad (9.116)$$

$$\mathcal{F}[x^n f(x)] = \left(i \frac{d}{dk}\right)^n \mathcal{F}[f(x)]. \quad (9.117)$$

これらは(9.113)の部分積分、あるいは(9.115)を $n$ 回繰り返せば導くことができる。

たたみ込み(合成績)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy f(x-y)g(y) \quad (9.118)$$

をフーリエ変換しよう。

$$\mathcal{F}[f(x)] = F(k), \quad \mathcal{F}[g(x)] = G(k) \quad (9.119)$$

を定義しておく。

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} dy f(x-y)g(y)\right] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dy f(x-y)g(y) \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-ikt} f(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-iky} g(y) = 2\pi F(k)G(k). \end{aligned} \quad (9.120)$$

すなわちたたみ込みのフーリエ変換はフーリエ変換の積となる。さらにこれを逆変換すると

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[2\pi F(k)G(k)] &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} F(k)G(k) \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \delta(k_1 - k_2) e^{ik_1 x} F(k_1)G(k_2). \end{aligned}$$

ここでディラックのデルタ関数に関する関係式

$$\delta(k_1 - k_2) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{1}{2\pi} e^{-i(k_1 - k_2)y} \quad (9.121)$$

を代入すると、

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[2\pi F(k)G(k)] &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 e^{-i(k_1 - k_2)y} e^{ik_1 x} F(k_1)G(k_2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 e^{ik_1(x-y)} F(k_1) \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 e^{ik_2 y} G(k_2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy f(x-y)g(y) \end{aligned} \quad (9.122)$$

となり元に戻る。このようにたたみ込みが積  $F(k)G(k)$  に変換されるため、積分方程式を解く時、しばしばフーリエ変換が有用である。

ここで、いくつかの関数のフーリエ変換を表の形で与えておこう。

$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} F(k)$	$F(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx}$
1	$\delta(k)$
$x^n f(x)$	$(i \frac{d}{dk})^n F(k)$
$\frac{1}{ x ^\nu}, (x \neq 0, 0 < \nu < 1)$	$\frac{1}{\pi} \sin(\frac{\nu\pi}{2}) \frac{\Gamma(1-\nu)}{ k ^{1-\nu}}$
$\frac{1}{x^2+a^2}, (a > 0)$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \exp(-a k )$
$e^{-ax^2}, (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \exp(-\frac{k^2}{4a})$
$\operatorname{sech} ax, (a > 0)$	$\frac{1}{2a} \operatorname{sech}(-\frac{\pi k}{2a})$
$\frac{\sin ax}{x}, (a > 0)$	$\begin{cases} \frac{1}{2} &  k  < a \\ 0 &  k  > a \end{cases}$
$\sin(a^2 x^2), (a > 0)$	$\frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \cos(\frac{k^2}{4a^2} + \frac{\pi}{4})$

表 9.1 フーリエ変換の表.

例 65 1次元の熱伝導を  $-\infty < x < \infty$  の領域で考えよう。時刻  $t = 0$  に  $x = \xi$  の位置に強さ 1 の点熱源を置いたとき、この系は方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x, t) = \delta(x - \xi)\delta(t) \tag{9.123}$$

により表される。(9.123)を、初期条件

$$u(x, t) = 0, \quad t < 0 \tag{9.124}$$

のもとで解こう。

(9.123)を  $x$  および  $t$  についてフーリエ変換し、

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{ik(x-\xi)} e^{-i\omega t} \tilde{u}_\xi(k, \omega) \tag{9.125}$$

と書く。さらに点熱源を表す(9.123)の右辺をフーリエ変換すると

$$\delta(x - \xi)\delta(t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{ik(x-\xi)} e^{-i\omega t}. \tag{9.126}$$

これらを (9.123) に代入して整理すると

$$\tilde{u}_\xi(k, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{-i\omega + ak^2} \quad (9.127)$$

となる。 $k$  を実数とした時、(9.127) は複素  $\omega$  平面上で、 $Im \omega > 0$  の領域で正則である (極は  $\omega = -iak^2$ )。 (9.127) をフーリエ逆変換して、 $u(x, t)$  は (9.125) で与えられる。この時、 $\omega$  についての積分は  $e^{-i\omega t}$  の因子により、 $t > 0$  の時は複素  $\omega$  平面上の下半平面で、 $t < 0$  の時は上半平面で閉じなくてはならない (図 9.7)。極は  $\omega$  平面の下半平面上  $-iak^2$  にあるから、 $t < 0$  の場合には積分路のかこむ領域内に極はなく、積分の結果は 0 となる。

$$u(x, t) = 0 : t < 0. \quad (9.128)$$

$t > 0$  の場合には  $\omega$  -下半平面上の極  $-iak^2$  からの寄与を計算して、積分路は負の方向にまわっているから

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{ik(x-\xi)} e^{-i\omega t} \frac{1}{-i\omega + ak^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-\xi)} e^{-ak^2 t} \end{aligned}$$

となる。この積分は今まで何度かでてきたもので、(9.110) と同じ様に実行できる。

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-at(k - i\frac{x-\xi}{2at})^2} e^{-(x-\xi)^2/4at} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right\} \equiv G(x-\xi, t), \quad t > 0 \quad (9.129) \end{aligned}$$

$t \rightarrow 0$  の極限では、これはデルタ関数の定義となるから

$$\lim_{t \rightarrow 0} G(x-\xi, t) = \delta(x-\xi) \quad (9.130)$$

であり、たしかに点熱源であることも理解できる。この解 (9.129) を 1次元熱伝導方程式の「基本解」という。

一般に無限の長さの 1次元熱伝導方程式で、初期条件として  $t = 0$  で熱分布  $f(x)$  を与えた時、任意の時刻での熱分布は

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x) \end{aligned} \quad (9.131)$$



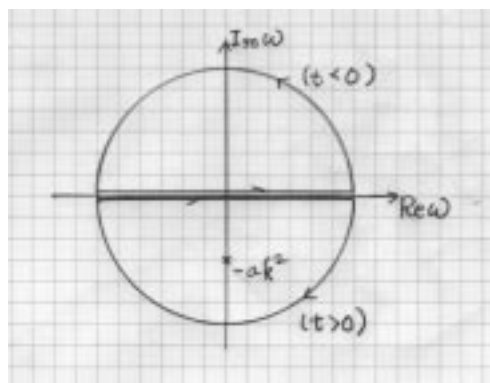


図 9.7 熱伝導方程式の基本解を求めるための積分路 (例 65)。

に従う。この方程式の解は基本解を用いて

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi G(x - \xi, t) f(\xi) \quad (9.132)$$

で与えられる。 $f(x)$  を点熱源が連続的に分布しているものと見なせば、(9.132) はそれらの解を重ね合わせたものと理解することができる。

### 9.5.2 ラプラス変換

ラプラス変換も電気回路や制御系の議論にしばしば用いられる。関数  $y(t)$  が次の性質を満足していると仮定する。

- (1)  $y(t) = 0, t < 0$
- (2)  $\int_0^{\infty} dt e^{-\gamma t} |y(t)| < \infty, \gamma: \text{正の実数}$  (9.133)

この時

$$Y_L(p) = \int_0^{\infty} dt e^{-pt} y(t) \equiv \mathcal{L}[y(t)] \quad (9.134)$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} dp e^{pt} Y_L(p) \equiv \mathcal{L}^{-1}[Y_L(p)] \quad (9.135)$$

を定義する。(9.134) を  $y(t)$  のラプラス変換、(9.135) をラプラス逆変換という。 $Y_L(p)$  を計算したあとで、複素  $p$  平面上でその極を含む領域がすべて左側にくる様に  $\gamma$  を決める。そのような  $\gamma$  を選んで、ラプラス逆変換 (9.135) を行う (図 9.8)。

例題によって、ラプラス変換の具体例をみよう。

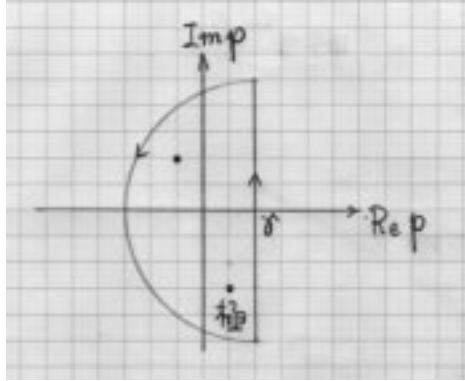


図 9.8 ラプラス逆変換の積分路.

例 66  $(df/dx)$  をラプラス変換する。

$$F_L(p) = \mathcal{L}[f(x)] = \int_0^{\infty} dx e^{-px} f(x) \quad (9.136)$$

として、部分積分すると

$$\int_0^{\infty} dx e^{-px} f'(x) = e^{-px} f(x) \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} dx e^{-px} f(x) = -f(0) + pF_L(p)$$

となる。ただしここで境界条件  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-px} f(x) = 0$  を用いた。したがって

$$\mathcal{L}[f'(x)] = -f(0) + pF_L(p) \quad (9.137)$$

を得る。

例題 66の結果を少し一般的に書くと

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(x)] = p^n F_L(p) - \sum_{r=0}^{n-1} p^{n-r-1} f^{(r)}(0) \quad (9.138)$$

である。

たたみ込み (合成積)

$$\int_0^x d\xi f(\xi)g(x-\xi) \quad (9.139)$$

をラプラス変換しよう。

$$\mathcal{L}[f(x)] = F_L(p), \quad \mathcal{L}[g(x)] = G_L(p) \quad (9.140)$$

とする。

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}\left[\int_0^x d\xi f(\xi)g(x-\xi)\right] \\
 &= \int_0^\infty dx e^{-px} \int_0^x d\xi f(\xi)g(x-\xi) = \int_0^\infty dx \int_0^x d\xi e^{-p\xi} f(\xi) e^{-p(x-\xi)} g(x-\xi) \\
 &= \int_0^\infty d\xi \int_\xi^\infty dx e^{-p\xi} f(\xi) e^{-p(x-\xi)} g(x-\xi) = \int_0^\infty d\xi e^{-p\xi} f(\xi) \int_0^\infty dy e^{-py} g(y) \\
 &= F_L(p)G_L(p). \tag{9.141}
 \end{aligned}$$

このようにたたみ込みが積  $F(k)G(k)$  に変換される。したがって、積分方程式を解く際にラプラス変換は有用である。

例 67 微分方程式

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2 u}{dx^2} + u = f(x) \quad , \quad x \geq 0 \\
 & u(0) = u'(0) = 0 \tag{9.142}
 \end{aligned}$$

をラプラス変換により解いてみよう。

$u(x)$  および  $f(x)$  のラプラス変換を

$$u_L(p) = \int_0^\infty dx e^{-px} u(x) = \mathcal{L}[u(x)], \tag{9.143}$$

$$f_L(p) = \int_0^\infty dx e^{-px} f(x) = \mathcal{L}[f(x)] \tag{9.144}$$

と書く。 $(d^2 u/dx^2)$  のラプラス変換  $\mathcal{L}[u''(x)]$  を計算しよう。これは結果についてはずでに (9.138) で見た。

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[u''(x)] &= \int_0^\infty e^{-px} u''(x) dx \\
 &= [e^{-px} u'(x)]_{x=0}^\infty - \int_0^\infty (-pe^{-px}) u'(x) dx \\
 &= [e^{-px} u'(x)]_0^\infty + [pe^{-px} u(x)]_0^\infty - p \int_0^\infty (-pe^{-px}) u(x) dx \\
 &= p^2 u_L(p) - pu(0) - u'(0) \tag{9.145}
 \end{aligned}$$

ここでは部分積分、および  $e^{-px} u'(x)$ ,  $e^{-px} u(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow \infty)$  を用いた。

初期条件  $u(0) = u'(0) = 0$  より、(9.142) 第1式は

$$(p^2 + 1)u_L(p) = f_L(p)$$

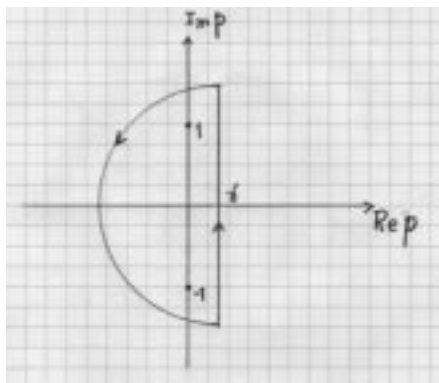


図 9.9 例題 67 のための積分路.

すなわち

$$u_L(p) = \frac{f_L(p)}{p^2 + 1} \quad (9.146)$$

となる。

ラプラス変換のたたみ込み (9.141) を考えると、(9.146) のラプラス逆変換の結果は

$$u(x) = \int_0^x f(\xi) \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{p^2 + 1} \right] \right\}_{x-\xi} d\xi \quad (9.147)$$

であることが分かる。添字  $x - \xi$  はラプラス逆変換した関数の変数を示している。ここで  $1/(p^2 + 1)$  のラプラス逆変換を求める必要がある。

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{p^2 + 1} \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} dp e^{px} \frac{1}{p^2 + 1}. \quad (9.148)$$

$1/(p^2 + 1)$  は 1 位の極を  $p = \pm i$  に持っている。この被積分関数で、 $\gamma$  が任意の正の数であれば、直線  $\text{Re } p = \gamma$  より右側は正則な領域である。 $p$  の積分路は図 9.9 のように左側で閉じても、その値は変わらない。したがって  $\gamma$  は任意の正の数としてよい。積分路は正の方向にまわっているから

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{p^2 + 1} \right] &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} dp \left( \frac{1}{p+i} - \frac{1}{p-i} \right) e^{px} \left( -\frac{1}{2i} \right) \\ &= -\frac{1}{2i} [e^{-ix} - e^{+ix}] = \sin x \end{aligned} \quad (9.149)$$

となる。これを (9.147) に代入して、最終的に

$$u(x) = \int_0^x d\xi f(\xi) \sin(x - \xi) \quad (9.150)$$

を得る。

ラプラス変換のいくつかを表にまとめておこう。

$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} dp e^{px} F_L(p)$	$F_L(p) = \int_0^\infty dx e^{-px} f(x)$	$\gamma$
$\theta(x-a) = \begin{cases} 1 & : x > a > 0 \\ 0 & : x < a \end{cases}$	$\frac{e^{-pa}}{p}$	0
$x^\nu \quad \nu > -1$	$\frac{\Gamma(1+\nu)}{p^{\nu+1}}$	0
$e^{ax}$	$\frac{1}{p-a}$	a
$\sin ax$	$\frac{a}{p^2+a^2}$	0
$\cos ax$	$\frac{p}{p^2+a^2}$	0
$\sinh a$	$\frac{a}{p^2-a^2}$	$ a $
$\cosh a$	$\frac{p}{p^2-a^2}$	$ a $

表 9.2 ラプラス変換の表.

## 9.6 線形応答の理論：クラマース・クローニツヒの関係

時刻  $t = 0$  に、外部から物質に刺激  $E$  (光や磁場あるいは力の場) を加えたとき、物質の変化 (応答)  $P$  は外場  $E$  の 1 次の範囲 (線形応答の仮定) で、瞬間的な変化とゆっくりした変化に分けて、次のように書くことができる。

$$P(t) = \begin{cases} (\varepsilon_\infty - \varepsilon_0)E & : t = 0 \\ \phi(t)E & : t > 0 \end{cases} \quad (9.151)$$

一般に時間  $t$  に依存して変化する外場  $E(t)$  の場合には、重ね合せにより全体の応答は

$$P(t) = (\varepsilon_\infty - \varepsilon_0)E(t) + \int_{-\infty}^t \phi(t-s)E(s)ds \quad (9.152)$$

である。 $\phi(t-s)$  は初期 ( $s \rightarrow -\infty$ ) に充分速く 0 となる。

外場  $E(t)$  と応答  $P(t)$  のフーリエ変換を

$$\begin{aligned} E(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt E(t) e^{i\omega t} \\ P(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt P(t) e^{i\omega t} = \{\varepsilon(\omega) - \varepsilon_0\} E(\omega) \end{aligned} \quad (9.153)$$

と定義する。最後の式では線形応答の仮定により、フーリエ成分  $P(\omega)$  はフーリエ成分  $E(\omega)$  に比例する。 $\varepsilon(\omega)$  を複素誘電率という。式(9.152)をフーリエ変換すると

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_\infty + \int_0^\infty ds \phi(s) e^{i\omega s} \quad (9.154)$$

である。 $\phi(t)$  は  $t \rightarrow \infty$  で十分速くゼロに近づく関数であるから式(9.154)において  $\text{Im}\omega > 0$  の範囲では  $\varepsilon(\omega)$  は特異性を持たない、すなわち正則である。実数の  $\omega$  についても  $\delta$  を充分小さい正数として  $\omega + i\delta$  のことであると考ええる。このことは  $\phi(t)$  に対する因果率の要求、すなわち応答は刺激より後に起きる、ということの一つの表現である。

(9.154)式により  $\varepsilon(\omega)$  は複素  $\omega$  平面の上半平面  $\text{Im}\omega > 0$  で正則であり、そこで

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} (\varepsilon(\omega) - \varepsilon_\infty) = 0 \quad (9.155)$$

である。積分路  $C$  として複素  $\zeta$  平面上を、 $\zeta = -\infty$  から  $\zeta = +\infty$  まで実軸上を動いたあと  $\zeta$  上半平面を上側に閉じたものをとると、ジョルダンの補題を用いてコーシーの積分定理により

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(\zeta) - \varepsilon_\infty}{\zeta - \omega} d\zeta = \begin{cases} \varepsilon(\omega) - \varepsilon_\infty & \text{Im}\omega > 0 \\ 0 & \text{Im}\omega < 0 \end{cases} \quad (9.156)$$

となる。これを書きなおすと、 $\text{Im}\omega > 0$  として、さらに  $\omega$  の共役複素数  $\bar{\omega}$  ( $\text{Im}\bar{\omega} < 0$ ) を用いて

$$\varepsilon(\omega) - \varepsilon_\infty = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \{ \varepsilon(\zeta) - \varepsilon_\infty \} \left[ \frac{1}{\zeta - \omega} \pm \frac{1}{\zeta - \bar{\omega}} \right] \quad (9.157)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' (\varepsilon(\omega') - \varepsilon_\infty) \text{Re} \frac{1}{\omega' - \omega} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' (\varepsilon(\omega') - \varepsilon_\infty) \text{Im} \frac{1}{\omega' - \omega} \end{aligned} \quad (9.158)$$

となる。ここで式(9.158)の(第1式の実部)  $+i \times$  (第2式の虚部)、または  $i \times$  (第1式の虚部)  $+ (第2式の実部)$  をとると

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega) - \varepsilon_\infty &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\varepsilon''(\omega')}{\omega' - \omega} && : \text{Im}\omega > 0 \\ &= -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\varepsilon'(\omega') - \varepsilon_\infty}{\omega' - \omega} && : \text{Im}\omega > 0 \end{aligned} \quad (9.159)$$

を得る。ただし $\varepsilon'$ は $\varepsilon(\omega)$ の実部、 $\varepsilon''$ は虚部として

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$$

と書いた。あるいは(9.159)の実部と虚部を別々に分けて書けば、コーシーの主値積分を用いて

$$\varepsilon'(\omega) - \varepsilon_\infty = \text{Pv} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\pi} \frac{1}{\omega' - \omega} \varepsilon''(\omega') \quad (9.160)$$

$$\varepsilon''(\omega) = -\text{Pv} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\pi} \frac{1}{\omega' - \omega} (\varepsilon'(\omega') - \varepsilon_\infty) \quad (9.161)$$

となる。以上より、 $\varepsilon(\omega)$ の実部と虚部は全く独立というわけではない。これらの式をクラマース・クローニツヒの関係式という。クラマース・クローニツヒの関係式は応答の基本的性質である因果律より得られるきわめて一般的な結果である。

## 9.7 第9章問題

問1.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^p \theta \cos^q \theta d\theta = \frac{\Gamma(\frac{p+1}{2})\Gamma(\frac{q+1}{2})}{\Gamma(\frac{p+q}{2} + 1)}$$

を示せ。これから

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2} & (n:\text{偶数}) \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & (n:\text{奇数}) \end{cases}$$

を導け。

問2.

$$\begin{aligned} & \int_{0 \leq x_1, x_2, \dots, x_n; x_1+x_2+\dots+x_n \leq 1} dx_1 \int dx_2 \int \dots \int dx_n x_1^{l_1-1} x_2^{l_2-1} \dots x_n^{l_n-1} f(x_1+x_2+\dots+x_n) \\ &= \frac{\Gamma(l_1)\Gamma(l_2)\dots\Gamma(l_n)}{\Gamma(l_1+l_2+\dots+l_n)} \int_0^1 f(u) u^{l_1+l_2+\dots+l_n-1} du \end{aligned}$$

を示せ ( $l_i > 0$ )。これから半径  $a$  の  $n$  次元超球の体積および表面積を求めよ。

問3.

$$\Gamma_n(z) = \int_0^n t^{z-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$$

を定義すると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(z) = \Gamma(z)$$

である。これを用いて

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{m=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{m}\right)^z \left(1 + \frac{z}{m}\right)^{-1} \right\} \quad (\text{オイラーの公式})$$

を示せ。またこれから

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-\frac{z}{m}} \quad (\text{ワイエルシュトラスの無限乗積公式})$$

を導け。ただし  $\gamma$  はオイラー定数

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n\right) = - \int_0^{\infty} e^{-t} \log t dt = 0.57721566 \dots$$

である。



問 4. 9.3 で述べた楕円積分について (9.73)(9.75)(9.76) などを確かめよ。

問 5. フーリエ変換の表を確かめよ。

問 6. ラプラス変換の表を確かめよ。