# 第 8 章

# 解析接続とリーマン面

複素解析の最も重要な結論の 1 つ、解析接続について説明しよう。解析接続によって、正則関数が或る領域たとえば実軸上で定義されたとき、関数の定義域を拡張していく方法が与えられる。

1 価正則関数の場合、微分可能な実関数 $f(x)$ に対して $x \to z$という置き換えをすることによって、実軸上で $f(x)$ と一致する正則関数が得られる。また本章ではテーラー展開を用いて解析接続を一般的に行なうワイエルシュトラスの方法を紹介する。より一般的な解析接続の方法の 1 つは、第 9 章でガンマ関数、ベータ関数について例題として示す。本書では、リーマン面については最初にベキ根が出てきた第 3 章で説明した。しかし本章の解析接続によってより具体的に理解できる。

関数の一般的な性質を知ることができるから、解析接続は複素解析の物理学への応用上、特に重要である。微分方程式の解や物理学、工学の諸分野で現われる特殊関数も、複素関数として眺めるとより良く理解できる。

## 8.1 一致の定理

**定理 37 一致の定理：**領域 $D$内で $f(z)$ が正則で、$D$の内部の一点 $a$ に収束する $D$内の点列 $\{z_k\}$ の各点上で

$$f(z_k) = 0 \tag{8.1}$$

であるなら、$D$内で $f(z) = 0$ である。

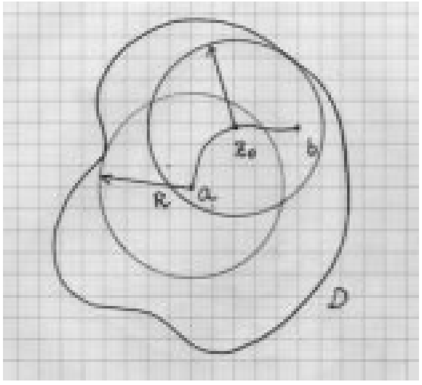


**図 8.1** 収束円 $|z-a|<R$と点 $a$ から点 $b$ への接続.

(証明) $f(z)$ は $D$内で正則であるから、$a$ の周り半径 $R$の円内でテイラー展開できる（$|z-a|<R$)。

$$f(z)=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots \tag{8.2}$$

$f(z)$ は $z=a$ で連続であるから

$$c_0=f(a)=\lim_{k\to\infty}f(z_k)=0. \tag{8.3}$$

次に

$$f_1(z)=\frac{f(z)}{z-a}=c_1+c_2(z-a)+c_3(z-a)^2+\cdots \tag{8.4}$$

を定義すると $f_1(z)$ も級数の収束円内で正則で、$f_1(z_k)=f(z_k)/(z_k-a)=0$ であるから

$$c_1=f_1(a)=\lim_{k\to\infty}f_1(z_k)=0. \tag{8.5}$$

以下同じ様にして

$$c_0=c_1=c_2=\cdots=0 \tag{8.6}$$

となり、$z=a$ を中心とする収束円内（$|z-a|<R$）で $f(z)$ は恒等的に 0 であることが分かる（図 8.1)。

次に収束円外の任意の点 $b$（ $|b-a|>R$）を考えよう。$a$ と $b$ を適当に曲線 $z(t)$ でむすび、この曲線上で収束円内に $z_0$を選ぶ（$|z_0-a|<R$)。曲線

$z(t)$ 上、$a$ から $z_0$の間に $\lim_{k\to\infty} z'_k = z_0$ となる点列 $\{z'_k\}$ を選び、再び $f(z)$ を $z_0$の周りでテイラー級数に展開し同じ議論を繰り返すことができる。この結果、$z_0$を中心とした収束円内 $|z - z_0| < R'$ のすべての点で $f(z) = 0$ となることが示される。これをくり返すことにより $b$ を収束円内に含む新たなテイラー級数を作ることができ、同様な議論により結局 $f(b) = 0$ となる。（証明おわり）

上の定理から次の定理がただちに導かれる。

**定理 38** 領域 $D$内で $f_1(z), f_2(z)$ が正則で、$D$内の一点 $a$ に収束する $D$内の点列 $\{z_k\}$ の各点で $f_1(z_k) = f_2(z_k)$ なら、$D$内のすべての点で $f_1(z) = f_2(z)$ である。

(証明）$f(z) = f_1(z) - f_2(z)$ として一致の定理を用いればよい。(証明終わり)

**定理 39** $f(z)$ が $D$内で正則で、$D$内の点 $a$ で

$$f(a) = f^{(k)}(a) = 0 \qquad k = 1, 2, \cdots \tag{8.7}$$

であるなら、$f(z) \equiv 0$ である。

(証明）$z = a$ を中心とした領域で $f(z)$ は

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \cdots \tag{8.8}$$

と書かれる。(8.7) が成立すれば

$$c_0 = c_1 = c_2 = \cdots = 0 \tag{8.9}$$

である。$z = a$ を中心とした小領域で $f(z)$ は恒等的に 0 であるから、一致の定理により $D$内の全域で $f(z) = 0$ である。(証明終わり)

関数 $f_1(z)$ と $f_2(z)$ がともに正則な領域 $D$内の小領域内で $f_1(z) = f_2(z)$ であるならば、正則領域 $D$全域で $f_1(z) = f_2(z)$ である。$f(z) = f_1(z) - f_2(z)$ を考えて定理 39を用いれば容易に結論される。

**例 55** 実軸上で $\exp x$ である関数を複素 $z$平面上に拡張すれば $\exp z$となる。

**例 56** 実軸上で $\sin x$ である関数を複素 $z$平面上で拡張すれば $\sin z$となる。

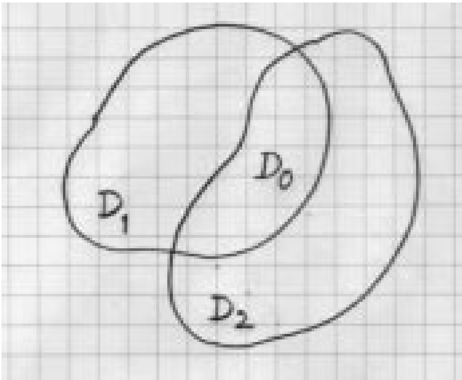


**図 8.2** 単連結領域の解析接続.

## 8.2 解析接続とリーマン面

複素関数 $f_1(z)$ の正則領域が $D_1, f_2(z)$ の正則領域が $D_2$であり、$D_1$と $D_2$の共通領域が $D_0$であるとする（図 8.2）。$D_0$内の任意の点 $z$で $f_1(z) = f_2(z)$であれば、$f_1$の $D_2$内への自然な接続は $f_2$である。$f_2(z)$ を $f_1(z)$ の $D_2$への解析接続（analytic continuation）という。

$D_1$と $D_2$の合併集合が単連結領域であるとき、$D_2$における $f_1$の解析接続 $f_2$が可能であればそれは一意的である。解析接続が一意に決まらず $f_3(z)$ も同じく $D_2$における $f_1(z)$ の解析接続であったとすると、$D_0$で $f_2(z) = f_3(z)$ であり $D_2 - D_0$で $f_2(z) \neq f_3(z)$ であることになる。これは一致の定理に反するからである。

$f_1(z)$ の正則領域 $D_1$と $f_2$の正則領域 $D_2$が 2 つの分離した共通領域 $D_0$と $D_0'$を持つとする（図 8.3）。すなわち $D_1$と $D_2$の合併集合が多重連結であるとする。このとき $D_0$内で $f_1(z) = f_2(z)$ であったとしても $D_0'$では $f_1(z) = f_2(z)$ であるかどうかは分からない。$D_0'$内での $f_1(z), f_2(z)$ については何も言っていないからである。$D_0'$で $f_1(z) \neq f_2(z)$ であるとき、$D_1$と $D_2$の合併領域で $f(z)$ は多価関数となる。この様なとき $D_0'$では $D_1$と $D_2$を区別して考え、$D_1$と $D_2$は $D_0$でのみはり合わせて考えればよい。これがリーマン面である。

**例 57** 実軸上で定義された指数関数

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots \tag{8.10}$$

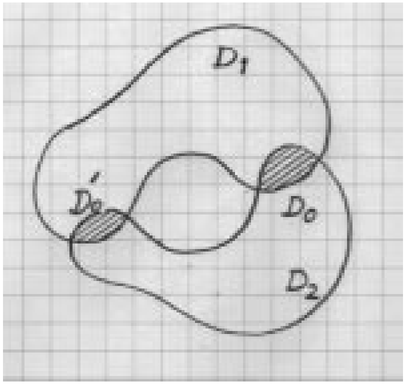


**図 8.3**　多重連結領域の解析接続.

の解析接続は

$$e^z = 1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots \tag{8.11}$$

である。

上の例のように、微分可能な実数の関数 $f(x)$ の複素平面への解析接続は単に $x$ を $z$に置き換えることで得られる。得られた関数 $f(z)$ が 1 価正則であれば、この方法で解析接続は一意に決まる。$f(z)$ が多価関数であるときには、初めの領域で $f(x)$ に一致するように偏角を決めなくてはならない。これが最も一般的で具体的な解析接続の方法である。

もうひとつ具体的な解析接続の方法は、ワイエルシュトラスによるもので、テーラー級数に対して次のような操作を行なう。

関数 $P(z:a)$ は $a$ の周りのテイラー級数

$$P(z:a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \tag{8.12}$$

で与えられ収束半径は $R_a$であるとする（$|z-a| < R_a$)。この収束円内に点 $b$ を考えると、関数 $P(z:a)$ を $b$ の周りで展開して

$$Q(z:b) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-b)^n \tag{8.13}$$

$$b_n = \frac{1}{n!}P^{(n)}(b:a) \tag{8.14}$$

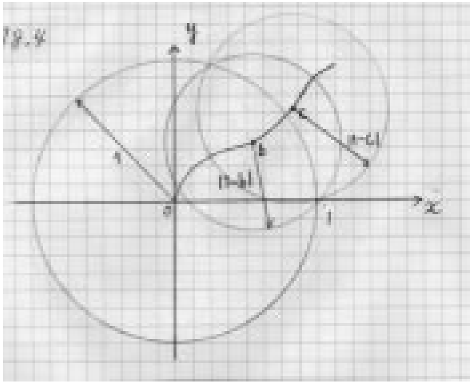

**図 8.4** $P(z:0) = 1 + z + z^2 + \cdots$の解析接続.

となる。級数 $Q(z:b)$ の収束半径を $R_b$とする（$|z-b| < R_b$)。2 つの円の共通領域では

$$P(z:a) = Q(z:b) \tag{8.15}$$

であるから $Q(z:b)$ は $P(z:a)$ の $|z-b| < R_b$への解析接続である。以上の手続きで、具体的に解析接続を行ない、関数の正則域を拡張していくことができる。

**例 58**

$$P(z:0) = 1 + z + z^2 + \cdots \qquad (|z| < 1) \tag{8.16}$$

を収束円 $|z| < 1$ の外に解析接続してみよう。点 $z = b$（$|b| < 1$）を適当に選ぶ。$z = b$ の周りで $P(z:0)$ テイラー展開しなおしたものを $Q(z:b)$ と書くとこれは

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n!}P^{(n)}(b:0) = \frac{1}{n!}\sum_{l \geq n}\frac{l!}{(l-n)!}b^{l-n} = \frac{1}{(1-b)^{n+1}} \qquad (8.17) \\ Q(z:b) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-b)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-b)^n}{(1-b)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{1-b}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z-b}{1-b})^n. \qquad (8.18) \end{aligned}$$

$Q(z:b)$ の収束半径は $|z-b| < |1-b|$、すなわち $b$ を中心として $z = 1$ を通る円の内部である（図 *8.4*)。このようにして $z = 1$ をさけながら円 $|z| = 1$ の

外に $P(z:0)$ を解析接続していくことができる。実際、級数の和をとると

$$P(z:0)=\frac{1}{1-z} \tag{8.19}$$

となり、実はもともと $P(z:0)$ は $z=1$ に極がある関数である。そのため解析接続は極 $z=1$ を避けながら行なわれる。$Q(z:b)$ の級数の和も取ることができて、確かに（*8.19*）と一致する。

**例 59**

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}=z+z^2+z^6+z^{24}+\cdots \quad (|z|<1) \tag{8.20}$$

を考えよう。これは $z=1$ で発散するとともに $z^{n!}=1(n=1,2,3,\cdots)$ を満たすすべての点 $z$で発散する。このような点は原点を中心とした単位円周上で稠密に存在する。したがって単位円内にどのような点をとっても単位円の外に解析接続することはできない。このような境界を**自然境界**という。

## 8.3　第 8 章問題

問 1.　$f(z)=(z+1)^{1/2}$を $1^{1/2}=1$ のリーマン面上、$z=0$ のまわりでテイラー展開せよ。

問 2.　$f(z)=(1+z^{1/2})^{-1}$を

(1)　$1^{1/2}=1$ のリーマン面上で $z=1$ のまわりでテイラー展開せよ。

(2)　$1^{1/2}=-1$ のリーマン面上で $z=1$ のまわりでローラン展開せよ。

問 3.　$z^{-1/2}$を $z=\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/4}$の周り、および $z=\mathrm{e}^{7\pi\mathrm{i}/4}$の周りでテイラー展開せよ。

問 4.　$w=(\log z)^2$のリーマン面はどのような構造を持つか。