

第6章

複素積分の応用

展望：

前章で複素積分の原理と計算方法について学んだ。複素積分には関数の性格の理解が必要でありまた沢山の応用分野のあることを既に例で示してきた。さらに複素積分の応用として忘れてならないのは、それが実関数の積分にもおおいに役に立つことである。それを紹介し実際に使えるようになるというのが本章の主題である。

この章では大きく分けて2つのことについて述べる。第一に、複素積分特に留数定理を用いた実定積分の計算を考え、実際にいろいろ具体的な積分をやってみる。考える積分にもう少し積分区間を足してやることによって積分を留数計算に帰着させることができることがある。そこで重要なのはジョルダンの補題である。

2つ目は、被積分関数に分岐点があるような複雑な積分の場合である。複素関数のリーマン面の構造を考えて積分路を工夫すると、計算が実行できる場合について述べる。この場合は、リーマン面の構造を先ず理解し、変数 z の偏角、被積分関数の偏角をきちんと知ることにより積分がとっても簡単になる。複素積分を使いこなすことにより、積分の世界が大きく広がることが実感できるであろう。

その他のもっと広い応用の分野のいくつかについては第9章で再び述べることにする。

6.1 留数定理の応用:定積分の計算

複素積分を用いると、実数だけに限ってでは困難だった定積分を容易に実行できることがある。

例 40

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4 \cos \theta}. \quad (6.1)$$

$z = e^{i\theta}$ とおくと $\cos \theta = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, $dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta$ である。 θ が 0 から 2π ままで変わるとき z は単位円周 $|z| = 1$ の上を 1 周する。したがって I は書きなおして

$$\begin{aligned} I &= \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz} \frac{1}{5 - 2(z + \frac{1}{z})} = i \oint_{|z|=1} dz \frac{1}{2z^2 - 5z + 2} \\ &= \frac{i}{2} \oint_{|z|=1} dz \frac{1}{(z - \frac{1}{2})(z - 2)}. \end{aligned}$$

積分路の内側にある特異点は 1 位の極 $z = 1/2$ だけであるから、留数は

$$I = \frac{i}{2} \cdot 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{2}\right) = -\pi \lim_{z \rightarrow 1/2} (z - \frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{(z - \frac{1}{2})(z - 2)} = \frac{2\pi}{3}. \quad (6.2)$$

例 41

$$I = \frac{1}{2} \oint_{|z|=2} \frac{|dz|}{|z - 1|^2}. \quad (6.3)$$

$z = 2e^{i\theta}$ とおくと $dz = 2ie^{i\theta} d\theta$, $|dz| = 2d\theta$ である。書きなおして

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{(2e^{i\theta} - 1)(2e^{-i\theta} - 1)} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4 \cos \theta}$$

である。これは先の例 40 と同じであるから

$$I = \frac{2\pi}{3}. \quad (6.4)$$

もう少し一般的な積分を行なうために、次の準備をしておこう。

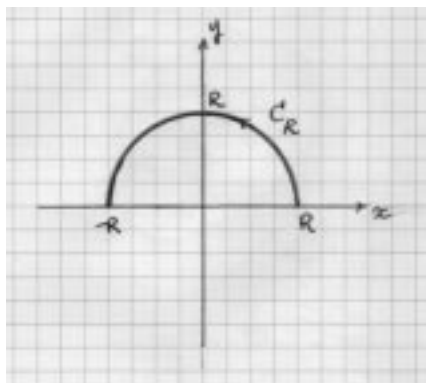


図 6.1 ジョルダンの補題における積分路 C_R :半径 R の半円.

補題 1 ジョルダンの補題: z 平面の上半平面 ($0 \leq \arg z \leq \pi$) で、 $|z| \rightarrow \infty$ としたとき $f(z)$ は一様に θ に近づくと仮定する。このとき $a > 0$ とすると

$$I_R = \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty). \quad (6.5)$$

ただし積分路 C_R は、半径 R の円周上 $z = Re^{i\theta}$ を上半平面で $\theta = 0$ から π まで動く半円周である (図 6.1)。

(証明) $|I_R|$ を次のように評価する。

$$|I_R| = \left| \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz \right| \leq \int_{C_R} |e^{iaz}| |f(z)| |dz|. \quad (6.6)$$

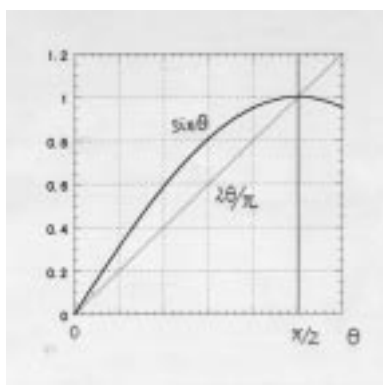


図 6.2 $\sin \theta \geq 2\theta/\pi$.

$z = Re^{i\theta}$ とおくと $dz = iRe^{i\theta}d\theta$, $|dz| = Rd\theta$, $|e^{iaz}| = e^{-aR\sin\theta}$. これらを代入して

$$|I_R| \leq \int_0^\pi e^{-aR\sin\theta} |f(Re^{i\theta})| R d\theta. \quad (6.7)$$

$|f(z)|$ は $|z| \rightarrow \infty$ で一様に 0 に近づくから、任意の正数 ε に対して半径 $R(\varepsilon)$ を充分大きくとれば、積分路 C_R 上で

$$|f(z)| < \varepsilon \quad (6.8)$$

となる。故に

$$|I_R| \leq \varepsilon R \int_0^\pi e^{-aR\sin\theta} d\theta = 2\varepsilon R \int_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\theta} d\theta. \quad (6.9)$$

さらに $0 \leq \theta \leq \pi/2$ では常に $\sin\theta \geq 2\theta/\pi$ である (図 6.2) から

$$|I_R| \leq 2\varepsilon R \int_0^{\pi/2} e^{-(2aR/\pi)\theta} d\theta = \frac{\varepsilon\pi}{a} (1 - e^{-aR}) \leq \frac{\pi}{a} \varepsilon \quad (6.10)$$

である。半径 R を大きくすると ε はいくらでも小さくできる、すなわち

$$\varepsilon \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

であるから

$$\lim_{R \rightarrow \infty} |I_R| = 0 \quad (6.11)$$

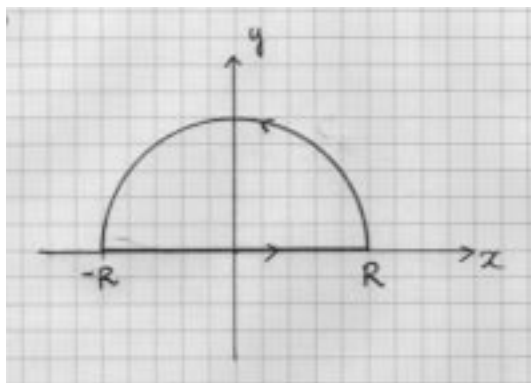
を得る。(証明終わり)

上では z 平面の上半平面を考えた。もし $f(z)$ が下半平面 ($2\pi \geq \arg z \geq \pi$) で $|z| \rightarrow \infty$ としたとき一様に 0 に近づくならば、 $a > 0$ として

$$\int_{C'_R} e^{-iaz} f(z) dz \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty) \quad (6.12)$$

となる。ただし積分路 C'_R は半径 R の円周上 $z = Re^{i\theta}$ を下半平面で $\theta = \pi$ から 2π まで動く半円周であるとする。

複素積分を実行する際に、 C_R または C'_R のような半円の積分路を付け加えることによって閉じた積分路を作り、留数の計算に帰着することができる。

図 6.3 例 42 の積分路 C_1 .

例 42

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + 1} dx \quad (a > 0). \quad (6.13)$$

$\sin ax = (e^{iax} - e^{-iax})/(2i)$ を用いて書き換える。

$$I = \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} \frac{x}{x^2 + 1} (e^{iax} - e^{-iax}) dx = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{iaz}}{x^2 + 1} dx \quad (6.14)$$

ここで

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1} \quad (6.15)$$

とおくとジョルダンの補題により図 6.1 の積分路 C_R 上の複素積分

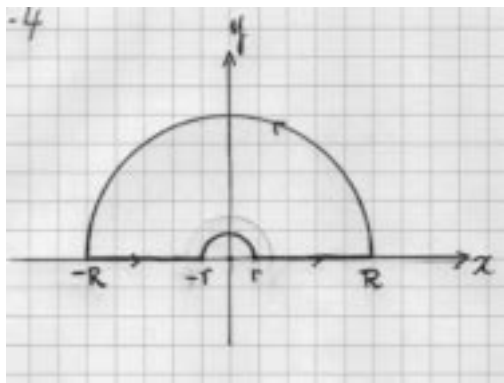
$$\int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz \quad (6.16)$$

は $R \rightarrow \infty$ の極限で θ に収束する。これを加えて

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2i} \oint_{C_1} \frac{z e^{iaz}}{z^2 + 1} dz. \quad (6.17)$$

積分路 C_1 は実軸上を $-R$ より R まで動き、その後半円周 C_R 上を動いて閉じる (図 6.3)。(6.17) で被積分関数の極は $z = \pm i$ であるが、 C_1 内には $z = i$ のみがある。留数は

$$\lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{z e^{iaz}}{z^2 + 1} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z e^{iaz}}{z + i} = \frac{e^{-a}}{2}.$$

図 6.4 例 43 の積分路 C_2 .

故に

$$I = \frac{1}{2i} 2\pi i \frac{e^{-a}}{2} = \frac{\pi}{2} e^{-a}. \quad (6.18)$$

$f(x)$ は実軸上の区間 $[a, b]$ 内の特異点 c を除いて連続であるとする。 $\varepsilon > 0$ として $z = c$ の両側に同じ巾 ε だけ領域を除外し

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right\} \quad (6.19)$$

が有限の確定値を与えるとき、これを (コーシーの) 主値積分といい

$$\text{Pv} \int_a^b f(x) dx \quad (6.20)$$

と書く。

例 43

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx. \quad (6.21)$$

これはコーシーの主値積分の意味で次の様書きなおすことができる。

$$\begin{aligned} I &= \lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2ix} dx \\ &= \frac{1}{2i} \lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \left(\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx \right). \end{aligned}$$

ここで半径 R および r の 2 つの上半平面上の半円を付け加えて閉じた積分路 C_2 を用いて新しい積分を考える (図 6.4)

$$\begin{aligned} J &= \oint_{C_2} \frac{e^{iz}}{z} dz \\ &= \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{z=re^{i\theta}, \theta=\pi \rightarrow 0} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{z=Re^{i\theta}, \theta=0 \rightarrow \pi} \frac{e^{iz}}{z} dz \\ &= J_1 + J_2 + J_3 + J_4 \end{aligned} \quad (6.22)$$

原点から有限の距離にある e^{iz}/z の極は $z = 0$ のみであるから、積分路 C_2 の内側には極は存在しない。故に

$$J = 0. \quad (6.23)$$

(6.22) 式の第 1 項 J_1 + 第 3 項 J_3 は

$$J_1 + J_3 = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx$$

であるから

$$\lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} (J_1 + J_3) = 2iI \quad (6.24)$$

となる。半径 r の半円周上の積分 J_2 は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} J_2 &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{z=re^{i\theta}, \theta=\pi \rightarrow 0} \frac{e^{iz}}{z} dz = \lim_{r \rightarrow 0} i \int_{\pi}^0 d\theta e^{ir \cos \theta - r \sin \theta} = i \int_{\pi}^0 d\theta \\ &= -i\pi \end{aligned} \quad (6.25)$$

これは e^{iz}/z の $z = 0$ における留数の半分 (に $-2\pi i$ を掛けたもの) であることに注意せよ。(なぜそうなのか考えてみよ。) 半径 R の半円周上の積分 J_4 はジョルダンの補助定理により $R \rightarrow \infty$ の極限で 0 となる。

$$\lim_{R \rightarrow \infty} J_4 = 0 \quad (6.26)$$

以上をまとめて

$$0 = \lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} (J_1 + J_3) + \lim_{r \rightarrow 0} J_2 + \lim_{R \rightarrow \infty} J_4 = 2iI + (-i\pi) + 0 \quad (6.27)$$

であるから

$$I = \frac{\pi}{2}. \quad (6.28)$$

この積分では半径 r の半円を上半平面で閉じたが、下半平面で閉じてもよい。そのとき e^{iz}/z の極 $z = 0$ は積分路の内にある。極からの寄与、半円周からの寄与を正しく計算すれば同じ値を得る。

例 44

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}. \quad (6.29)$$

$1/(1+z^2)$ の極は $z = \pm i$ 。例 42 の積分路 C_1 (図 6.3) を考える。 C_1 内には 1 位の極 $z = i$ があるから次の積分が計算できる。

$$J = \oint_{C_1} \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{1}{1+z^2} = \pi. \quad (6.30)$$

一方積分 J を書き直せば

$$J = \int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^2} + i \int_0^\pi d\theta \frac{Re^{i\theta}}{1+R^2e^{2i\theta}}. \quad (6.31)$$

第 1 項は $R \rightarrow \infty$ で I になり、第 2 項は $1/R$ 程度の量で $R \rightarrow \infty$ とすれば 0 になる。

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi d\theta \frac{Re^{i\theta}}{1+R^2e^{2i\theta}} \right| &\leq \int_0^\pi d\theta \left| \frac{Re^{i\theta}}{1+R^2e^{2i\theta}} \right| = \int_0^\pi d\theta \frac{R}{\sqrt{1+R^4+2R^2\cos 2\theta}} \\ &\leq \int_0^\pi d\theta \frac{R}{R^2-1} = \frac{\pi R}{R^2-1} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

故に

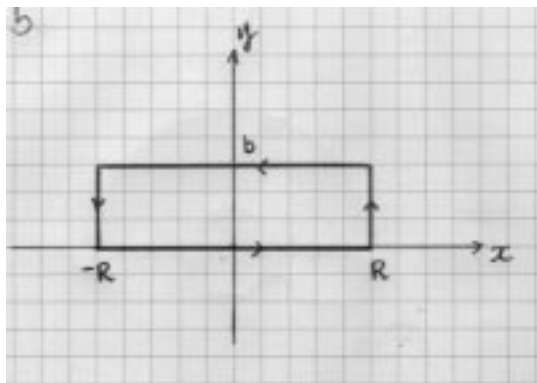
$$I = \pi. \quad (6.32)$$

例 45

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx \, dx. \quad (6.33)$$

図 6.5 のような積分路 C_3 を選び e^{-z^2} を積分する。積分路 C_3 内に e^{-z^2} の極はないから

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{C_3} e^{-z^2} dz \\ &= \int_{-R}^R e^{-x^2} dx + i \int_0^b e^{-(R+iy)^2} dy + \int_R^{-R} e^{-(x+ib)^2} dx + i \int_b^0 e^{-(-R+iy)^2} dy \\ &= \int_{-R}^R e^{-x^2} dx + \int_R^{-R} e^{-x^2+b^2-2ibx} dx \\ &\quad + i \int_0^b e^{-R^2+y^2-2iRy} dy + i \int_b^0 e^{-R^2+y^2+2iRy} dy. \end{aligned}$$

図 6.5 例 45 の積分路 C_3 .

$R \rightarrow \infty$ とすると最後の式の第 3、4 項の積分はそれぞれ 0 となる。

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx - \int_{-\infty}^{\infty} e^{b^2} e^{-x^2} (\cos 2bx - i \sin 2bx) dx \\ &= \sqrt{\pi} - e^{b^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx dx. \end{aligned}$$

故に¹

$$I = e^{-b^2} \sqrt{\pi}. \quad (6.34)$$

6.2 分岐点のある場合の定積分

分岐点がある場合の積分はリーマン面の構造を考えて積分路が偏角を含めて閉じるようにするなど、注意して行なわねばならない。いくつかの例を見ることにしよう。

¹ ガウス積分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ は次のように計算する。

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy e^{-x^2 - y^2} = \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\theta e^{-r^2} \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \pi. \end{aligned}$$

よって

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

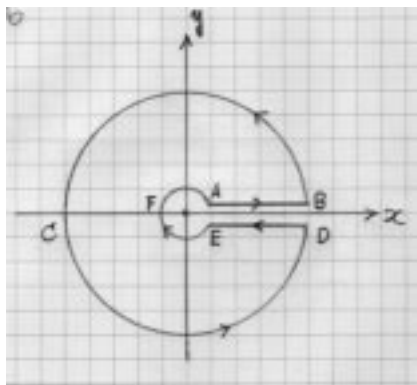


図 6.6 例 46 の積分路 C_4 . 切断は 0 から ∞ まで正の実軸部分にある.

例 46

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx \quad (0 < p < 1). \quad (6.35)$$

図 6.6 の積分路 C_4 (点 A は $z = r$ 、点 B は $z = R$ 、点 C は $z = Re^{i\pi}$) に沿って

$$J = \oint_{C_4} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz \quad (6.36)$$

を考える。積分路上の各点 $A \sim F$ での z および z^{p-1} の偏角は表 6.1 のとおりである。この積分路は $z = 0$ の分岐点をさけて切断を横切っていないから、閉じている。

同じリーマン面上で積分路の内側には 1 位の極 $z = -1 = e^{i\pi}$ を含むから

$$J = 2\pi i \operatorname{Res}(e^{i\pi}) = 2\pi i e^{i(p-1)\pi}$$

である。ここで $z = -1$ の偏角は $-\pi$ 、 3π などではなく π であることが重要である。 $A \sim F$ と同じリーマン面上にあるからである。また J は書き直して

$$J = \int_r^R \frac{x^{p-1}}{1+x} dx + \int_0^{2\pi} d\theta i R e^{i\theta} \frac{R^{p-1} e^{i(p-1)\theta}}{1 + R e^{i\theta}}$$

表 6.1 積分路 C_4 (図 6.6) に沿う偏角 $\arg z, \arg z^{p-1}$.

	A	B	C	D	E	F
$\arg z$	0	0	π	2π	2π	π
$\arg z^{p-1}$	0	0	$\pi(p-1)$	$2\pi(p-1)$	$2\pi(p-1)$	$\pi(p-1)$

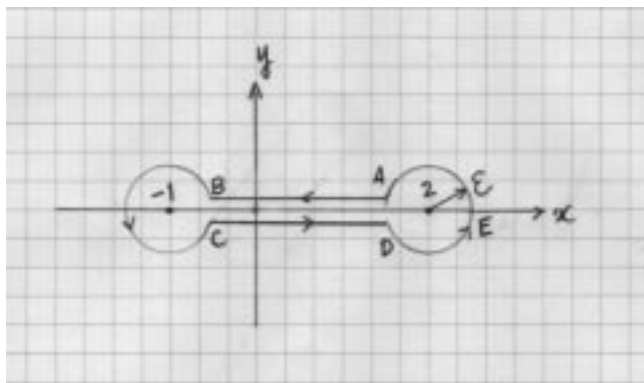


図 6.7 例 47 の積分路 C_5 . 切断は $x = -1$ と 2 を結ぶ実軸上の線分.

$$+ \int_R^r \frac{(xe^{2\pi i})^{p-1}}{1+x} dx + \int_{2\pi}^0 d\theta i r e^{i\theta} \frac{r^{p-1} e^{i(p-1)\theta}}{1+re^{i\theta}}.$$

$D \rightarrow E$ では偏角が 2π であるから $z = xe^{2\pi i}$ と書いた。上式右辺第 2 項は $p < 1$ であるから $R \rightarrow \infty$ とすると θ となる。右辺第 4 項は $p > 0$ であるから $r \rightarrow 0$ とすると θ となる。よって

$$J \rightarrow (1 - e^{i(p-1)2\pi}) \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx \quad : \quad (R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0).$$

結局

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{2\pi i e^{i(p-1)\pi}}{1 - e^{i(p-1)2\pi}} = \frac{-\pi}{\sin(p-1)\pi} = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad (6.37)$$

となる。

$$I = \frac{\pi}{\sin p\pi}. \quad (6.38)$$

この積分は第 9 章ベータ関数の項でもう一度考える。

例 47

$$I = \int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2 + 1}. \quad (6.39)$$

この積分を

$$J = \int_{C_5} \frac{1}{z^2 + 1} \log \frac{z+1}{z-2} dz \quad (6.40)$$

と関連づけて考えてみよう。² 積分路 C_5 は図 6.7 に示した。

点 A と点 B の間 $x > 0$ では z の偏角を θ とし、 A 点では $\arg(z_A - 2) = \pi$, $\arg(z_A + 1) = 0$ であるとする。リーマン面の分岐に関する切断は実軸の $-1 \leq x \leq 2$ の部分にある。

$$\log \frac{z+1}{z-2} = \ln \left| \frac{z+1}{z-2} \right| + i \arg \frac{z+1}{z-2} \quad (6.41)$$

であるから積分路上では次のようになる。

$$A \rightarrow B : z = x, z+1 = x+1, z-2 = x-2 = |2-x|e^{i\pi};$$

$$\log \frac{z+1}{z-2} = \ln \left| \frac{x+1}{x-2} \right| + i(0 - \pi). \quad (6.42)$$

$$B \rightarrow C : z = -1 + \varepsilon e^{i\theta}, z+1 = \varepsilon e^{i\theta}, z-2 = -3 + \varepsilon e^{i\theta} \simeq 3e^{i\pi}, \theta = 0 \rightarrow 2\pi;$$

$$\log \frac{z+1}{z-2} = \ln \left| \frac{\varepsilon e^{i\theta}}{3 - \varepsilon e^{i\theta}} \right| + i(\theta - \pi). \quad (6.43)$$

$$C \rightarrow D : z = x, z+1 = (x+1)e^{2\pi i}, z-2 = |2-x|e^{i\pi};$$

$$\log \frac{z+1}{z-2} = \ln \left| \frac{x+1}{x-2} \right| + i(2\pi - \pi). \quad (6.44)$$

$$D \rightarrow A : z = 2 + \varepsilon e^{i\theta}, z+1 = 3 + \varepsilon e^{i\theta} \simeq 3e^{2\pi i}, z-2 = \varepsilon e^{i\theta}, \theta = \pi \rightarrow 3\pi;$$

$$\log \frac{z+1}{z-2} = \ln \left| \frac{3 + \varepsilon e^{i\theta}}{\varepsilon e^{i\theta}} \right| + i(2\pi - \theta). \quad (6.45)$$

したがって積分 J は次のように書き直される。

$$\begin{aligned} J &= \int_2^{-1} dx \frac{1}{x^2+1} \left\{ \ln \left| \frac{x+1}{x-2} \right| - i\pi \right\} \\ &+ \varepsilon i \int_0^{2\pi} d\theta e^{i\theta} \frac{1}{(-1 + \varepsilon e^{i\theta})^2 + 1} \left\{ \ln \left| \frac{\varepsilon e^{i\theta}}{3 - \varepsilon e^{i\theta}} \right| + i(\theta - \pi) \right\} \\ &+ \int_{-1}^2 dx \frac{1}{x^2+1} \left\{ \ln \left| \frac{x+1}{x-2} \right| + i\pi \right\} \\ &+ \varepsilon i \int_{\pi}^{3\pi} d\theta e^{i\theta} \frac{1}{(2 + \varepsilon e^{i\theta})^2 + 1} \left\{ \ln \left| \frac{3 + \varepsilon e^{i\theta}}{\varepsilon e^{i\theta}} \right| + i(2\pi - \theta) \right\}. \quad (6.46) \end{aligned}$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ とすると、 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \varepsilon = 0$ に注意すると第 2 項、第 4 項は 0 となり、第 1 項、第 3 項の \ln 部分は打消しあい、

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J = 2\pi i \int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2+1} = 2\pi i I \quad (6.47)$$

²この方法は岩波講座応用数学 森正武、杉原正顯 著「複素関数論」による。

となる。

J の計算は、無限遠点の側から見ると積分路の内側にはたかだか極しか含まない。極は $z = \pm i$ であり、 C_5 に関して無限遠点と同じ側に存在する。したがって

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} J &= -\{\text{Res}(i) + \text{Res}(-i) + \text{Res}(\infty)\} \\ &= -\left\{ \frac{1}{2i} \log \frac{i+1}{i-2} - \frac{1}{2i} \log \frac{-i+1}{-i-2} + 0 \right\}. \end{aligned} \quad (6.48)$$

ここで (6.42) ~ (6.45) 式の偏角のとり方に従えば $i+1 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, $-i+1 = \sqrt{2}e^{i7\pi/4}$, $i-2 = \sqrt{5}e^{i\theta_0}$, $-i-2 = \sqrt{5}e^{i(2\pi-\theta_0)}$ となり ($\theta_0 = \pi - \arctan \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} + \arctan 2$)

$$\frac{1}{2\pi i} J = (\theta_0 - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} + \arctan 2. \quad (6.49)$$

故に

$$I = \frac{\pi}{4} + \arctan 2. \quad (6.50)$$

この結果は実の不定積分の公式

$$\int^x \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x \quad (6.51)$$

によりすぐ求められるが、ここで示した方法は一般的に使うことのできるものである。

例 48 シュワルツ・クリストッフェルの公式:

実軸にそった積分

$$z = f(t) = \int_0^t s^{-\frac{1}{2}}(s-1)^{-\frac{1}{2}} ds \quad (6.52)$$

を考える。実軸に沿った積分路は、分岐点 $s = 0$, $s = 1$ においては図 6.8 のように上半平面をまわることにする。³また $s > 1$ では $\arg s^{-1/2} = \arg(s-1)^{-1/2} = 0$ であるとする。これにより積分路上の他の偏角も一意的に決まる。

$$s > 1 : \arg s^{1/2} = \arg(s-1)^{1/2} = 0 \quad (6.53)$$

$$1 > s > 0 : \arg s^{1/2} = 0, \arg(s-1)^{1/2} = \pi/2 \quad (6.54)$$

$$0 > s : \arg s^{1/2} = \arg(s-1)^{1/2} = \pi/2 \quad (6.55)$$

³実軸上を動くとき分岐点での周り方によって積分結果は変わってくる。

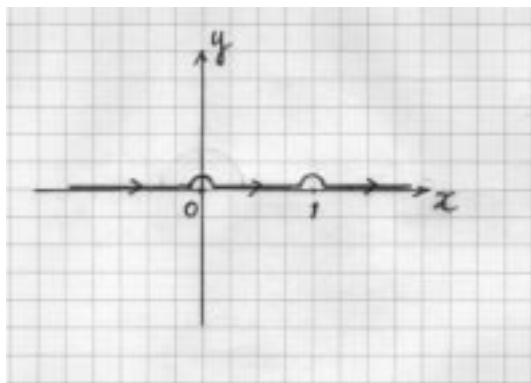


図 6.8 例 48 の実軸に沿った積分路.

したがって積分は次のように書かれる。

$$t < 0 : (t = |t|e^{i\pi}, s = re^{i\pi}, s - 1 = (1 + r)e^{i\pi})$$

$$z = \int_0^{|t|} (-dr)r^{-1/2}(1+r)^{-1/2}e^{-\pi i} = + \int_0^{|t|} \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}, \quad (6.56)$$

$$0 < t < 1 : (s = r, s - 1 = (1 - r)e^{i\pi})$$

$$z = \int_0^t dr r^{-1/2}(1-r)^{-1/2}e^{-i\pi/2} = -i \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}, \quad (6.57)$$

$$t > 1 : (s = r, s - 1 = r - 1)$$

$$z = -i \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{r(1-r)}} + \int_1^t \frac{dr}{\sqrt{r(r-1)}} = -i\pi + \int_1^t \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)}}. \quad (6.58)$$

これから $z = f(t)$ は t をパラメータとして複素 z 平面上で図 6.9 のような図形を描く。

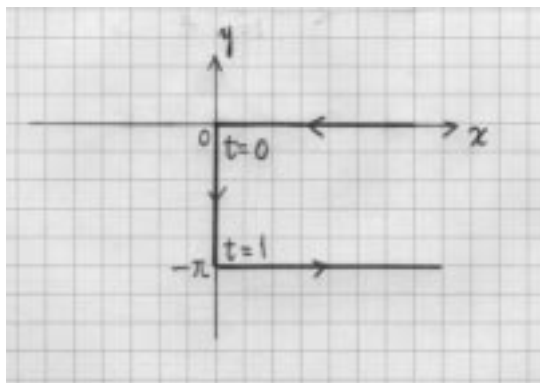


図 6.9 例 48 シュワルツ・クリストッフェルの公式による写像 $z = f(t)$.

6.3 第6章問題

問 1. 次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} \quad (|a| < 1) \quad (2) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + b \cos \theta)^2} \quad (a > b > 0)$$

問 2. 図 6.10 の積分路を用いて

$$\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx, \quad \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx$$

を計算せよ。(フレネル積分)

問 3. 次の積分を計算せよ。

$$(1) \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} dx$$

$$(2) \int_0^{\infty} \frac{x^\alpha}{x^2 + x + 1} dx \quad (-1 < \alpha < 1)$$

問 4. 図 6.11 の積分路を考えて $\int_0^\pi \log(\sin x) dx$ を計算せよ。

問 5. () 内に示した積分路を用いて次の積分を行え。

$$(1) \text{P.V.} \int_0^{\infty} \frac{x^\alpha}{x-1} dx \quad (0 > \alpha > -1) \quad (\text{図 6.12})$$

$$(2) \int_0^{\infty} \frac{\log x}{(1+x)^3} dx \quad (\text{図 6.13})$$

$$(3) \int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx \quad (a > 0) \quad (\text{図 6.14})$$

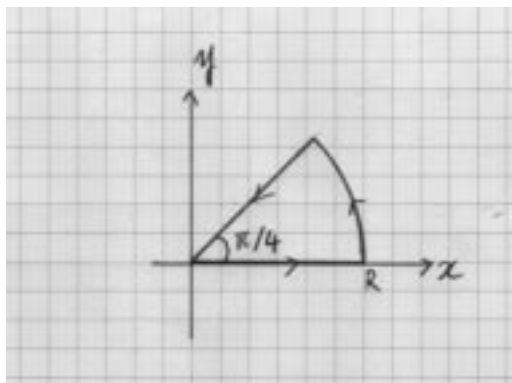


図 6.10 問題 2 の積分路.

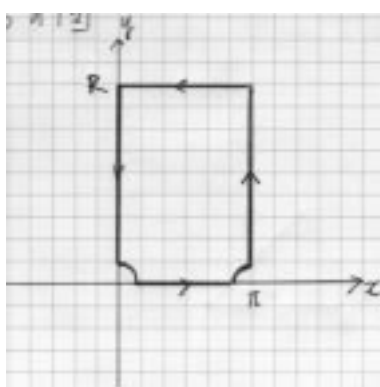


図 6.11 問題 4 の積分路.

問 6.

$$w = \int_0^z (1 - z^n)^{-2/n} dz$$

は $|z| < 1$ の領域を w 平面上の正 n 辺形内部に写像することを示せ。

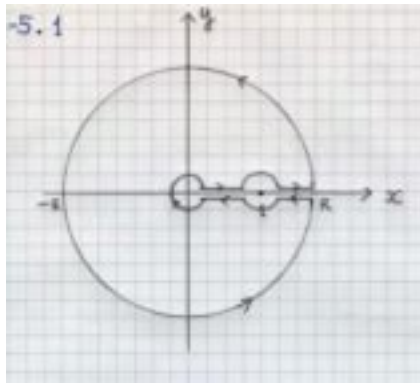


図 6.12 問題 5(1) の積分路.

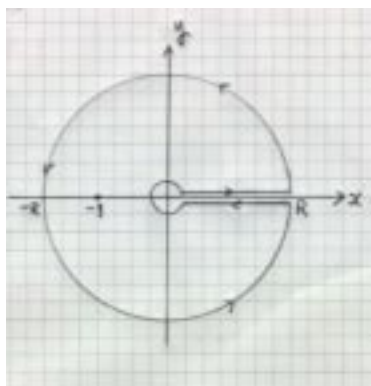


図 6.13 問題 5(2) の積分路.

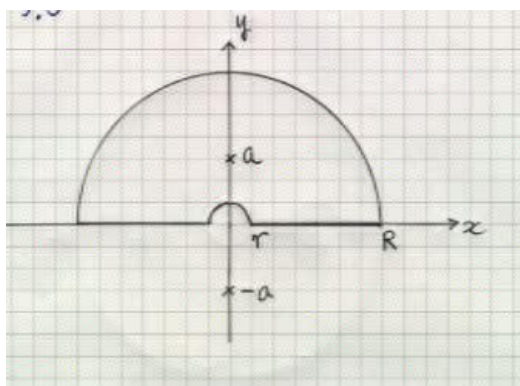


図 6.14 問題 5(3) の積分路.

