

## 第 5 章

# 複素積分

展望：

複素関数の微分に関する性質は、関数の局所的な性質を議論することであった。関数の性質として同時に大局的な性質も重要である。本章の中心的話題はコーシーの積分定理と留数定理である。

複素関数は、すでに微分のところでも学んだことであるが、或る点  $z$  での関数の値が 1 点でのみ決まるのではなくその大局的な性質と無縁ではない。積分の性質を学ぶと、たとえば正則関数の関数値が広い領域の境界で与えられればその内の全ての点での関数値が一意的に決ってしまうことなどが、もっと明瞭に示される。このような性質を本章では学ぶ。正則関数の実部、虚部はそれぞれ調和関数であるから、実はこのことは容易に理解できる。 $\Delta u = 0$  は  $u(x, y)$  が周りの平均と等しいということの意味するからである。

近代数学のほとんど全ての芽がガウスに始まるように、複素積分の最初の発見者はガウスであった。しかしガウスはそれを 1827 年まで公にはせず、A.L. コーシー (Cauchy) (1789-1857) によって再発見され 1814 年に発表された。コーシーは複素関数論に先だって多面体論や有限群論 (とくに置換群) の構成に携わった。数学に関する限りは革命的なアイデアの持ち主であるにもかかわらずコーシーは、狂信的ともいえるカトリック信者でかつブルボン王家の崇拜者であったという。死ぬまで自身の王党派としての政治的立場を明瞭にし続けたため、学問の世界においても政治的には相当の苦勞をしなくてはならなかったそうである。

オイラー、ラグランジュ、ラプラス、フーリエ、ガウス、コーシー等はちょうど 1700 年ごろから 1850 年代までの約 150 年間に次から次へと現れては大

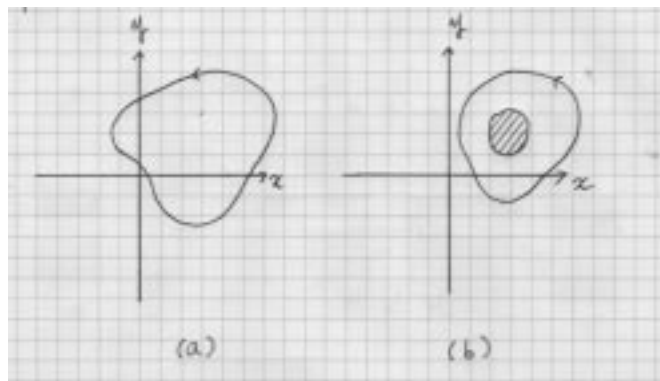


図 5.1 (a) 単連結領域. (b) 単連結でない領域 (多重連結領域).

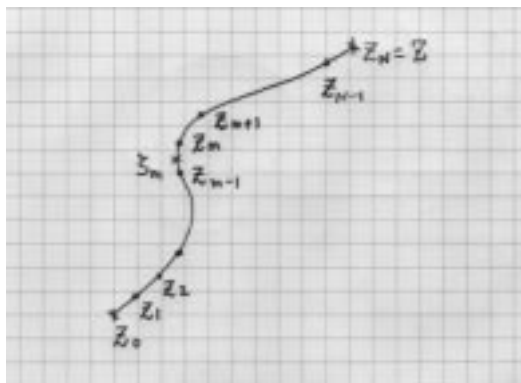
きな仕事を成し遂げていった。それらの新しい科学思想の発展は、絶対主義王制（プロシアのフリードリッヒ大王、ロシアのエカテリーナ女帝）の時代からフランス革命を経て近代国家形成期に至る政治的近代化の時期と重なっている。数学を勉強しながらその時代に思いをいたすと一段と数学が楽しめるのではないか。<sup>1</sup>

## 5.1 ジョルダン閉曲線と正則領域の形

複素  $z$  平面上で、実変数  $t$  をパラメータとして点  $z = z(t)$  が連続に動き、1 つの曲線を描く場合を考えよう。 $a \leq t \leq b$  として  $z(a)$  を始点、 $z(b)$  を終点という。 $z(a) = z(b)$  のとき、この曲線を閉曲線と呼ぶ。端点を除いて  $t_1 \neq t_2$  であるとき  $z(t_1) \neq z(t_2)$  である、すなわち自分自身と交わらない場合この曲線をジョルダン (Jordan) 曲線という。 $z(a) = z(b)$  であるジョルダン曲線をジョルダン閉曲線という。

ジョルダン閉曲線により複素  $z$  平面は 2 つの部分に分けられる。有界な領域を内部、有界でない他方を外部という。またジョルダン閉曲線上を、内部を左側に見て進む方向を正の向き、その反対の向きを負の向きという。領域  $D$  内の任意のジョルダン閉曲線を連続に変形して一点に収縮することができる場合、この領域  $D$  は単連結であるという。単連結でない領域を多重連結と

<sup>1</sup> 「数学をつくった人びと」E.T. ベル著（東京図書）は数学者の生身の人間としての物語、彼らが相互にどういようように影響しあったか、またその時代の歴史的背景を教えてくれる。

図 5.2 曲線  $C$  の分割  $\Delta$ .

いう (図 5.1)。今後、混乱のない場合、ジョルダン閉曲線を単に閉曲線という。

## 5.2 複素積分

### 5.2.1 複素積分の定義

複素平面内の曲線に沿った複素関数の積分 (複素積分) を定義しよう。

領域  $D$  内で連続な複素関数  $f(z)$  が定義され、またこの領域内に連続曲線  $C$  がある。連続曲線  $C$  は滑らかな曲線またはその有限個の接合であるとする。このような曲線を区分的に滑らかな曲線という。以下では積分路はすべて区分的に滑らかであるとする。

$C$  の始点を  $z_0$ 、終点を  $z$  とする。 $C$  の上で  $z_0$  と  $z$  の間に順に分点  $z_1, z_2, \dots, z_{N-1}$  をとり、この分割を

$$\Delta = \{z_0, z_1, z_2, \dots, z_{N-1}, z_N = z\} \quad (5.1)$$

と表す。分割  $\Delta$  に対して  $z_{j-1}$  と  $z_j$  との間の任意の点を  $\zeta_j$  とし、

$$S_\Delta = \sum_{j=1}^N f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}) \quad (5.2)$$

を考える (図 5.2)。

定義 30 複素積分 : 分割  $\Delta$  の分点を無限に多くしかつ  $z_j z_{j-1}$  の間隔を無限に小さくしたとき、連続関数  $f(z)$  に対して、和  $S_\Delta$  の極限值は有限に確定する。

このとき  $f(z)$  は複素積分可能であるといい、この値を複素積分といい

$$\int_C f(z)dz = \lim_{\delta \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}) \quad (5.3)$$

と書く ( $\delta = \max |z_j - z_{j-1}|$ )。向きまで(始点および終点)を含めて曲線  $C$  を積分路  $C$  という。積分路  $C$  がジョルダン閉曲線であるとき、曲線の向きにしたがって、積分の向きも正の向き、負の向きという。積分路  $C$  がジョルダン閉曲線を正の向きに動く閉じた積分路であるとき、これを

$$\oint_C f(z)dz \quad (5.4)$$

と書く。

複素関数  $f(z)$  が連続であるならば、和  $S_\Delta$  の極限值が有限に確定することを示しておく。 $z_j, \zeta_j$  および  $f(\zeta_j)$  の実部、虚部を

$$z_j = x_j + iy_j, \quad \zeta_j = \xi_j + i\eta_j, \quad f(\zeta_j) = u_j + iv_j$$

と書こう。 $S_\Delta$  を書き直して

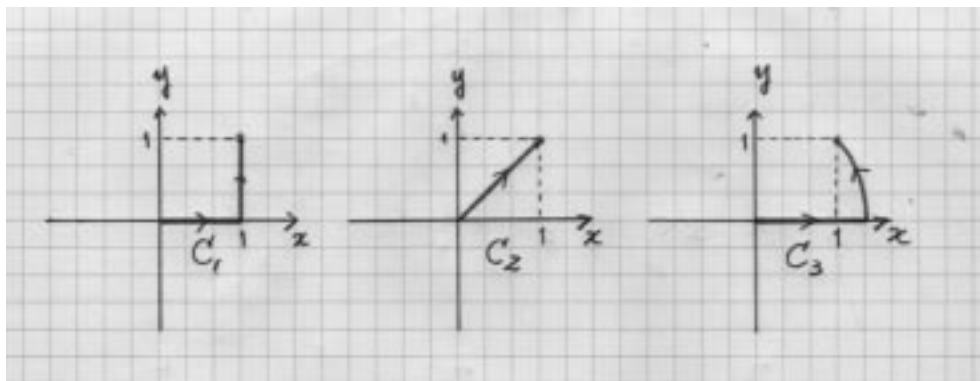
$$\begin{aligned} S_\Delta &= \sum_{j=1}^N f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^N [\{u_j(x_j - x_{j-1}) - v_j(y_j - y_{j-1})\} \\ &\quad + i\{v_j(x_j - x_{j-1}) + u_j(y_j - y_{j-1})\}] \end{aligned} \quad (5.5)$$

を得る。パラメータ  $s$  を用いて、曲線  $C$  を

$$C : x = x(s), y = y(s) \quad ; a \leq s \leq b \quad (5.6)$$

と表す。

$$\begin{aligned} z_j - z_{j-1} &= z(s_j) - z(s_{j-1}) \approx \frac{dz}{ds}(s_j - s_{j-1}) \\ x_j - x_{j-1} &= x(s_j) - x(s_{j-1}) \approx \frac{dx}{ds}(s_j - s_{j-1}) \\ y_j - y_{j-1} &= y(s_j) - y(s_{j-1}) \approx \frac{dy}{ds}(s_j - s_{j-1}) \end{aligned}$$

図 5.3 積分路  $C_1, C_2, C_3$ .

であるから、上の和は

$$S_{\Delta} = \sum_j \left( u_j \frac{dx}{ds} - v_j \frac{dy}{ds} \right) (s_j - s_{j-1}) + i \sum_j \left( v_j \frac{dx}{ds} + u_j \frac{dy}{ds} \right) (s_j - s_{j-1}) \quad (5.7)$$

と書き直される。

$$\begin{aligned} & u(x(s), y(s)) \frac{dx}{ds} - v(x(s), y(s)) \frac{dy}{ds} \\ & v(x(s), y(s)) \frac{dx}{ds} + u(x(s), y(s)) \frac{dy}{ds} \end{aligned} \quad (5.8)$$

は区分的に  $s$  の連続関数であるから、(5.7) の  $S_{\Delta}$  は分割の方法によらず極限  $N \rightarrow \infty$ ,  $|s_j - s_{j-1}| \rightarrow 0$  で有限値に確定する (1 変数の「リーマン積分の定理」参照)。これを

$$\lim S_{\Delta} = \int_a^b \left( u \frac{dx}{ds} - v \frac{dy}{ds} \right) ds + i \int_a^b \left( v \frac{dx}{ds} + u \frac{dy}{ds} \right) ds \quad (5.9)$$

と書き、曲線  $C$  に沿う線積分という。またこれを

$$\lim S_{\Delta} = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy) = \int_C f(z) dz \quad (5.10)$$

と書く。これが複素平面上の積分路  $C$  に沿った複素積分である。

例 29 始点を  $z = 0$ 、終点を  $z = 1 + i$  とする以下のいくつかの積分路 (図 5.3) に沿って、関数  $f(z) = z$  を定義に従って積分してみよう。

- (1)  $C_1: 0 \rightarrow 1 \rightarrow 1+i$   
 (2)  $C_2: 0 \rightarrow 1+i$   
 (3)  $C_3: 0 \rightarrow \sqrt{2} \xrightarrow{\text{円弧}} 1+i$

$C_1$ 上では、 $0 \rightarrow 1$ の部分では  $z = x$  だから  $dz = dx$ ,  $1 \rightarrow 1+i$  では  $z = 1+iy$  だから  $dz = idy$ 。

$C_2$ 上では  $z = (1+i)s$  と書いて  $dz = (1+i)ds$  となる。

$C_3$ 上では  $0 \rightarrow \sqrt{2}$ の部分では  $z = x$  だから  $dz = dx$ ,  $\sqrt{2} \rightarrow 1+i$ の円弧上では  $z = \sqrt{2}e^{i\theta}$  と書いて  $dz = i\sqrt{2}e^{i\theta}d\theta$  である。

$$(1) \int_{C_1} z dz = \int_0^1 x dx + i \int_0^1 (1+iy) dy = \frac{1}{2} + i(1 + i\frac{1}{2}) = i$$

$$(2) \int_{C_2} z dz = \int_0^1 (1+i)s(1+i) ds = (1+i)^2 \frac{1}{2} = i$$

$$(3) \int_{C_3} z dz = \int_0^{\sqrt{2}} x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}e^{i\theta} i \sqrt{2}e^{i\theta} d\theta = 1 + (i-1) = i$$

いずれの積分路についても答は  $i$  となり、積分は積分路によらず、始点と終点で決まっている(らしい)。

もう1つ別の例を考えよう。

例 30 始点を  $z = 1$ 、終点を  $z = 1$  として単位円周上を正の向きに1周積分する積分路で  $f(z) = 1/z$  を積分する(図 5.4)。単位円周上では  $z = e^{i\theta}$  において、 $dz = ie^{i\theta}d\theta$  であるから

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta}} ie^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i \quad (5.11)$$

となる。ここでは積分の道すじが閉曲線であることを示して  $\oint$  という記号を用いている。複素平面上で極 ( $z = 0$ ) を内側に見た1周積分の値がゼロでない値を与えていることに注意しておこう。

次に  $z = e^{i\theta_0}$  から出発して  $z = e^{i\theta_1}$  (または  $e^{-i(2\pi-\theta_1)}$ ) まで単位円周上を正(または負)の向きにまわる ( $e^{i\theta_1} = e^{-i(2\pi-\theta_1)}$ )。  $z = e^{i\theta}$ ,  $dz = izd\theta$  である

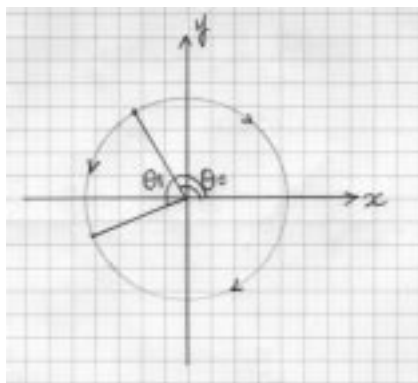


図 5.4 単位円周上の積分.

から

$$\int_{\theta=\theta_0}^{\theta=\theta_1} \frac{1}{z} dz = i \int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta = i(\theta_1 - \theta_0), \quad (5.12)$$

$$\int_{\theta=\theta_0}^{\theta=-(2\pi-\theta_1)} \frac{1}{z} dz = i \int_{\theta_0}^{-2\pi+\theta_1} d\theta = i(\theta_1 - \theta_0 - 2\pi). \quad (5.13)$$

この例では  $z$  平面上で始点も終点も同じであるが積分路は違い、積分の値も異なる。極  $z = 0$  を回る単位円周を考えると、第 1 の積分はその上を正の向きに、第 2 の積分は負の向きにまわっている。第 1 の積分路を回り、その後第 2 の積分路を反対に廻れば、結果的に単位円周上を一回りすることになる。

$$\int_{\theta=\theta_0}^{\theta=\theta_1} \frac{1}{z} dz - \int_{\theta=\theta_0}^{\theta=-(2\pi-\theta_1)} \frac{1}{z} dz = \oint \frac{1}{z} dz \quad (5.14)$$

例 29 のように、 $z$  平面上  $A$  から  $B$  までの複素積分が積分路によらず、点  $A, B$  のみによって決まっている場合を考えよう。 $A$  から  $B$  へ至る交わらない 2 つの積分路  $C_1$  と  $C_2$  を考える (図 5.5)。

$$\int_{A(C_1)}^B f(z) dz = \int_{A(C_2)}^B f(z) dz \quad (5.15)$$

であるから

$$\int_{A(C_1)}^B f(z) dz - \int_{A(C_2)}^B f(z) dz = \left( \int_{A(C_1)}^B + \int_{B(-C_2)}^A \right) f(z) dz = 0 \quad (5.16)$$

となる。ここで  $C_2$  を逆にたどる  $B$  から  $A$  への道すじを  $-C_2$  と書いた。積分の定義 (5.3) により積分路を逆にするとマイナスが付く。これは 5.2.2 の性質

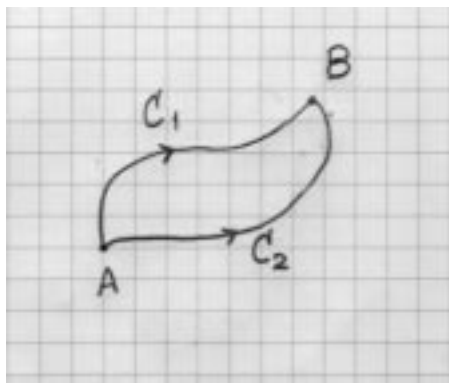


図 5.5 点Aから点Bに至る2つの積分路  $C_1$ 、 $C_2$ .

(2) に述べる。式 (5.16) を書き直すと、A から B に  $C_1$  を通り、さらに B から A に  $(-C_2)$  をたどってもどる道すじを  $C$  と書くと、 $C$  は閉曲線で

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad (5.17)$$

となる。上の議論から次の結論が得られる。

**定理 21** ある領域内での複素積分が積分路によらず始点と終点のみで決まるということは、その領域内の任意のジョルダン閉曲線を積分路とした一周積分が  $0$  ということである。

### 5.2.2 複素積分の性質

複素積分の基本的性質を以下にまとめておく。ただし関数  $f(z)$ 、 $g(z)$  は連続関数、積分路は区分的に滑らかであるとする。

(1)  $a$  を複素定数として

$$\int_C (f(z) + g(z)) dz = \int_C f(z) dz + \int_C g(z) dz \quad (5.18)$$

$$\int_C a f(z) dz = a \int_C f(z) dz. \quad (5.19)$$

(2) 点 A から点 B に至る積分路を  $C$ 、同じ曲線上を B より A に至る積分路を  $-C$  と書くと

$$\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz. \quad (5.20)$$



(3) 滑らかな積分路  $C$  はパラメータ  $s$  を用いて  $z = z(s)$ , ( $a \leq s \leq b$ ) と書かれるとする

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_a^b |f(z(s))| |z'(s)| ds \equiv \int_C |f(z)| |dz|. \quad (5.21)$$

ここでは3番目の不等式のみ証明しよう。(1)、(2)は簡単に定義から示すことができる。(5.21)の不等式の左辺は

$$\left| \lim \sum_j f(z(t_j)) \frac{dz(t_j)}{ds} (s_j - s_{j-1}) \right|, \quad (5.22)$$

右辺は

$$\lim \sum_j |f(z(t_j))| \left| \frac{dz(t_j)}{ds} \right| (s_j - s_{j-1}) \quad (5.23)$$

である。ただし  $s_{j-1} < t_j < s_j$ 。一般に成立する複素数  $a_j$  の不等式 ((1.19) の一般化)

$$\left| \sum_j a_j \right| \leq \sum_j |a_j|$$

を(5.22)と(5.23)に当てはめれば、式(5.21)の不等式を得る。(証明おわり)

### 5.3 コーシーの積分定理

複素関数の基本的性質の根幹をなすのがこれから説明するコーシー(Cauchy)の定理である。コーシーの定理は、 $f(z)$  の一価正則性すなわち  $f$  の微分可能性 ( $f = u + iv$  の  $u_x, u_y, v_x, v_y$  の存在) のみから導かれる。議論を簡単に行なうために最初に  $u_x, u_y, v_x, v_y$  の連続性も仮定して証明する。ただし、後でコーシーの定理から  $f(z)$  の無限回連続微分可能性をいうのだが、 $u_x$  等の連続性を仮定してしまうと循環論法になってしまう。それを避けるために、この節の後半で、 $u_x, u_y, v_x, v_y$  の存在のみを仮定し連続性は仮定しない証明も示すことにする。

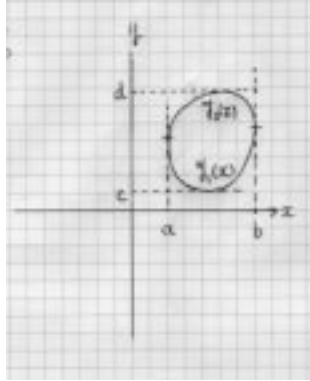


図 5.6 グリーンの定理.

### 5.3.1 コーシーの積分定理

定理 22 コーシーの積分定理: 単連結領域  $D$  において  $f(z)$  は一価正則であり、ジョルダン閉曲線  $C$  は  $D$  内にある。このとき

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad (5.24)$$

が成立する。

$f(z) = u + iv$  の正則性 (微分可能性) とともに、微分係数  $u_x, u_y, v_x, v_y$  の連続性を仮定する。こうすると、グリーンの定理を用いて上の定理を証明することができる (コーシー自身による証明)。<sup>2</sup>

式 (5.10) にグリーンの定理を用いて

$$\oint f(z) dz = \oint (u dx - v dy) + i \oint (v dx + u dy)$$

<sup>2</sup>グリーンの定理:  $f(x, y)$  および  $f_x, f_y$  が 2 次元領域内で連続であるとする。このとき領域内を正の向きに一周する積分路を  $C$ 、その内部を  $D$  とすると

$$\begin{aligned} \int \int_D f_y(x, y) dx dy &= - \oint_C f(x, y) dx \\ \int \int_D f_x(x, y) dx dy &= \oint_C f(x, y) dy \end{aligned}$$

である。 $C$  が  $y = y_1(x); a \leq x \leq b$  および  $y = y_2(x); a \leq x \leq b$  で、常に  $y_1(x) \leq y_2(x)$  (図 5.6) であれば第 1 式の証明は容易である。そうでないときには、領域  $D$  を上の条件を満たす小領域に分割する。

上の条件から積分は

$$\int \int_D f_y dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} f_y dy = \int_a^b dx \{f(x, y_2(x)) - f(x, y_1(x))\} = - \oint_C f(x, y) dx$$

$$= \int_D (-v_x - u_y) dx dy + i \int_D (u_x - v_y) dx dy. \quad (5.25)$$

ここでコーシー・リーマンの関係式  $u_x = v_y, v_x = -u_y$  (式 (2.10)) を用いると、(5.25) の最後の式は積分の中が恒等的に 0 となる。よって

$$\oint f(z) dz = 0$$

を得る。(グリーンの定理を用いた証明終わり)

$u_x$  等の連続性を仮定せずにコーシーの積分定理を証明しよう。簡単のため積分路  $C$  は閉じた 3 角形とする。一般の曲線の場合は小さな 3 角形に分割すればよい。正則関数  $f(z)$  は微分可能であるから、領域内で

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \gamma \quad (5.26)$$

と書かれる。 $\gamma$  は  $(z - z_0) \rightarrow 0$  としたとき、それより速く 0 になる複素数である。したがって任意の正数  $\varepsilon$  に対して 適当な  $\delta$  を選んで  $|z - z_0| < \delta$  である全ての  $z$  に対して

$$|f(z) - \{f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\}| < \varepsilon |z - z_0| \quad (5.27)$$

かつ、 $|z - z_0| \rightarrow 0$  のとき  $\varepsilon \rightarrow 0$  とすることができる。複素積分の性質 (3) (式 (5.21)) により、領域内の  $z_0$  を含む小さな領域をかこむジョルダン閉曲線  $C'$  に沿って

$$\left| \oint_{C'} dz [f(z) - \{f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\}] \right| < \varepsilon \oint_{C'} |dz| |z - z_0| \quad (5.28)$$

である。例 29 で示したように一次式の積分は積分路によらないから、左辺 { } 内を一周積分した結果は

$$\oint_{C'} \{f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\} dz = 0$$

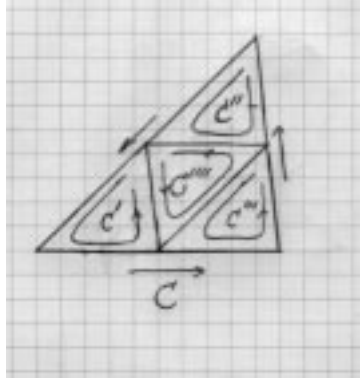
となる。ここで符号に注意してほしい。また 積分路  $C$  が  $x = x_1(y), c \leq y \leq d$  および  $x = x_2(y), c \leq y \leq d$  かつ  $x_1(y) \leq x_2(y)$  であれば、同様に次の第 2 式が示される。

$$\int \int_D f_x dx dy = \int_c^d dy \{f(x_2(y), y) - f(x_1(y), y)\} = \int_C f(x, y) dy.$$

以上 2 つの式から

$$\int \int_D \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \int_C (f dx + g dy)$$

を得る。これがグリーンの定理である。

図 5.7 3 角形積分路  $C$  の分割.

となる。これから

$$\left| \oint_{C'} f(z) dz \right| < \varepsilon \int_{C'} |z - z_0| |dz| \quad (5.29)$$

を得る。微少領域をかこむ曲線  $C'$  の長さを  $l$  とすると  $|z - z_0| < l$  であるから

$$\left| \oint_{C'} f(z) dz \right| < \varepsilon l^2 \quad (5.30)$$

である。

3 角形積分路  $C$  をその各辺を 2 等分する点を結び 4 つの等しい面積の 3 角形 ( $C'_1, C''_1, C'''_1, C''''_1$ ) に分ける (図 5.7)。  $C$  に沿う積分は 4 つの 3 角形それぞれの周に沿う積分の和となる。

$$\oint_C = \oint_{C'_1} + \oint_{C''_1} + \oint_{C'''_1} + \oint_{C''''_1} \quad (5.31)$$

積分の絶対値が最大値をとる 3 角形を  $C'_1$  とすると

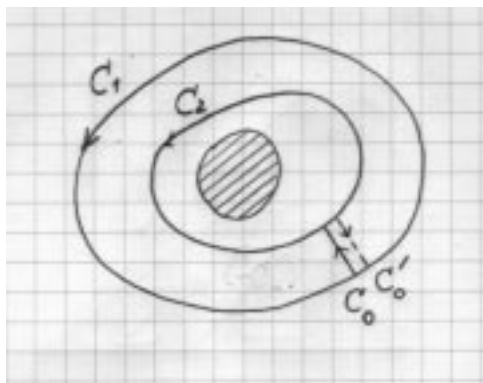
$$\left| \oint_C f(z) dz \right| \leq \sum_j \left| \oint_{C'_1} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \oint_{C'_1} f(z) dz \right| \quad (5.32)$$

である。この手続きを  $N$  回すすめると

$$\left| \oint_C f(z) dz \right| \leq 4^N \left| \oint_{C'_N} f(z) dz \right| \quad (5.33)$$

となる。先の小さな 3 角形  $C'$  を  $C'_N$  として式 (5.30) を考える。このとき  $C$  の周の長さを  $L$  とすれば  $l = 2^{-N}L$  であるから

$$\left| \oint_C f(z) dz \right| \leq 4^N \cdot \varepsilon 4^{-N} L^2 = \varepsilon L^2 \quad (5.34)$$

図 5.8 2重連結領域  $D$  と積分路  $C_1, C_2$ 

となる。 $N \rightarrow \infty$  とすることで  $\varepsilon \rightarrow 0$  とできるから、これで  $|\oint_C f(z)dz| \rightarrow 0$  すなわち  $\oint f(z)dz = 0$  を得る。以上の説明では、関数の連続性と微分可能性、積分路の分割以外使っていない。(  $u_x$  等の連続性を仮定しない証明終わり )

コーシーの積分定理では、正則領域は単連結であるとした。図 5.8 のような 2 重連結領域では図に示したような正則でない領域  $D'$  を内側に含む 2 つの閉曲線  $C_1, C_2$  を考える。また  $C_1$  と  $C_2$  をつなぐ道すじ  $C_0$  および、それを逆にたどる  $C_0' (-C_0)$  を考える。内側の道すじ  $C_2$  を逆にたどる道を  $-C_2$  と書く。 $C_1, C_0, -C_2, C_0'$  をつないだ道すじは正則領域のみを正の方向にまわる閉曲線で、しかも内部も一価正則である。したがって

$$\left( \int_{C_1} + \int_{C_0} + \int_{-C_2} + \int_{C_0'} \right) f(z)dz = \oint f(z)dz = 0 \quad (5.35)$$

となる。 $f(z)$  は積分路上で一価正則であるから  $C_0$  上の  $f(z)$  と  $C_0'$  上の  $f(z)$  は等しい。また  $C_0$  と  $C_0'$  では積分の向きは逆であるから

$$\int_{C_0} f(z)dz + \int_{C_0'} f(z)dz = 0 \quad (5.36)$$

となる。また (5.20) により

$$\int_{-C_2} f(z)dz = - \int_{C_2} f(z)dz \quad (5.37)$$

である。よって

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz \quad (5.38)$$

となる。以上をまとめると次の定理を得る。

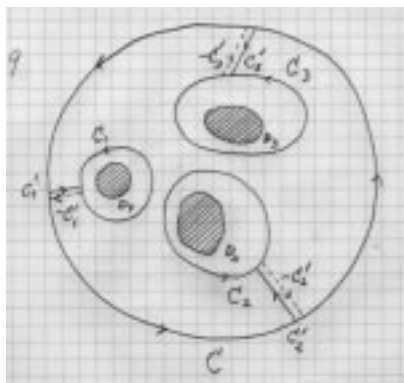


図 5.9 多重連結領域  $D$  と積分路  $C_j$ .

定理 23  $f(z)$  は領域  $D$  内で正則であり、 $D$  の内側に  $f(z)$  が正則でない領域  $D'$  が存在するとする (すなわち  $D$  は 2 重連結領域)。  $D'$  を内側に含む 2 つのジョルダン閉曲線  $C_1, C_2$  をとる (図 5.8)。  $C_1$  を領域  $D$  内で連続的に変形して  $C_2$  に変えることができる。このとき

$$\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz \quad (5.39)$$

が成り立つ。

$f(z)$  の一価正則領域は多重連結であるとする (図 5.9)。このとき定理は一般化されて次の様になる。

定理 24  $f(z)$  の 1 価正則領域  $D$  は多重連結で、その内側にある正則でない部分を  $D_1, D_2, \dots$  とする (図 5.9)。  $D_j$  を内側に見て、他の非正則領域を内側に含まない正の方向にまわる閉じた積分路をそれぞれ  $C_j$  とする。また  $C_1, C_2, \dots$  すべてを内に見て正の方向に進む積分路を  $C$  とする。このとき

$$\oint_C f(z) dz = \sum_j \oint_{C_j} f(z) dz \quad (5.40)$$

である。

(証明) 図 5.9 のように積分路  $C$  と  $C_j$  の間に往復の道すじ  $C'_j$  を付け加える。  $C_j$  を逆方向に進む道すじを  $-C_j$  と書くと、  $C$  と  $-C_j, C_j$  および  $C'_j, -C'_j$  により

非正則領域を内側に含まない閉じた積分路ができる。これに対してコーシーの積分定理を適用すれば

$$\left\{ \oint_C + \sum_j \left( \oint_{-C_j} + \int_{C_j} + \int_{-C_j} \right) \right\} f(z) dz = 0 .$$

$C_j$ 上と $-C_j$ 上で  $f(z)$  は等しくしたがって

$$\left( \int_{C_j} + \int_{-C_j} \right) f(z) dz = 0$$

である。よって

$$\oint_C f(z) dz = - \sum_j \oint_{-C_j} f(z) dz = \sum_j \oint_{C_j} f(z) dz$$

を得る。(証明終わり)

### 5.3.2 不定積分とその正則性

以上の議論から単連結正則領域では積分  $\int_a^z f(\xi) d\xi$  は  $a \rightarrow z$  の道すじに依存せず、したがって

$$F(z) = \int_a^z f(\xi) d\xi \quad (5.41)$$

と書くことができる。このことから不定積分を定義することができる。

**定義 31** 不定積分:  $f(z)$  が単連結領域で正則であるならばその領域内で定義される積分

$$\int_a^z f(\xi) d\xi \quad (5.42)$$

は積分の始点  $a$ 、終点  $z$  のみに依存し、 $a, z$  間の積分路には依存しない。このとき一意に決まる関数

$$F(z) = \int_a^z f(\xi) d\xi \quad (5.43)$$

を  $f(z)$  の原始関数、不定積分という。

原始関数  $F(z)$  は  $z$  を変化させると連続的に変化する。変化量は  $z$  の無限小の変化に対してその積分路の長さ程度の大きさである。したがって  $F(z)$  は連続で微分可能、すなわち正則である。このことをもう少し厳密に表現しよう。

定理 25  $f(z)$  が単連結領域  $D$  内で正則であるとき、その不定積分  $F(z)$  は正則で

$$\frac{dF(z)}{dz} = f(z) \quad (5.44)$$

である。

(証明) この証明は以下のように考えればよい。 $z + \Delta z$  を  $D$  内の点 ( $f(z)$  の正則点) とすると

$$\begin{aligned} F(z + \Delta z) - F(z) &= \int_z^{z+\Delta z} f(\xi) d\xi \\ &= f(z)\Delta z + \int_z^{z+\Delta z} (f(\xi) - f(z)) d\xi \end{aligned} \quad (5.45)$$

である。 $f(z)$  は連続であるから、任意の正数  $\varepsilon$  に対して適当に  $\delta$  を選ぶと、 $|\xi - z| < \delta$  である全ての  $\xi$  に対して  $|f(\xi) - f(z)| < \varepsilon$  とすることができる。したがって

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| &= \left| \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} (f(\xi) - f(z)) d\xi \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{|\Delta z|} \left| \int_z^{z+\Delta z} d\xi \right| = \varepsilon \end{aligned} \quad (5.46)$$

となる。 $\Delta z \rightarrow 0$  ( $\delta \rightarrow 0$ ) とすると  $f(z)$  の連続性から  $\varepsilon \rightarrow 0$  となる。

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z). \quad (5.47)$$

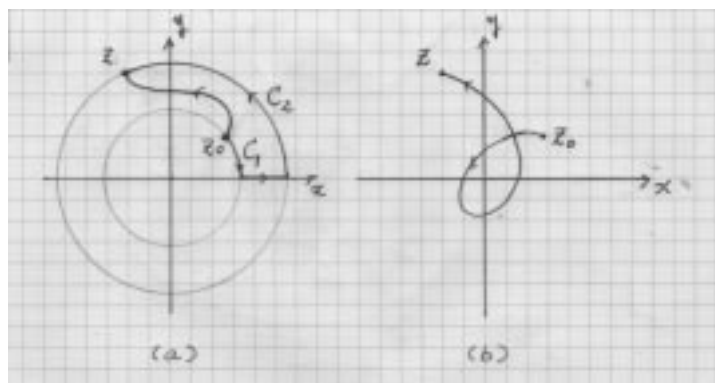
よって  $F(z)$  は微分可能、正則であり (5.44) が成り立つ。(証明終わり)。

### 5.3.3 対数関数の多価性と $1/z$ の積分

$f(z) = 1/z$  は  $z = 0$  を極とする。 $z = 0$  を含む領域を考えると  $f(z)$  は  $z = 0$  を除く 2 重連結領域で一価正則である。始点を  $z_0$  ( $0 \leq \arg z_0 \leq 2\pi$ )、終点を  $z$  ( $0 \leq \arg z \leq 2\pi$ ) とする積分路  $C_0$  は、 $z_0, z$  と同じく、偏角が  $0$  と  $2\pi$  の間で動くとする (図 5.10(a))。  $C_0$  上は  $1/z$  の単連結一価正則領域内にあるから、不定積分

$$F(z) = \int_{z_0}^z \frac{1}{\xi} d\xi \quad (5.48)$$



図 5.10  $1/z$  の積分路.

が一意的に定まる。したがって

$$F'(z) = \frac{1}{z} \quad (5.49)$$

であるから、 $(d/dz) \log z = 1/z$ と比較して

$$F(z) = \log z + a (\text{複素定数}) \quad (5.50)$$

である。一価正則領域内で始点と終点を固定したまま積分路を変更しても積分の値は変わらないから、図 5.10(a) のようにまず半径  $|z_0|$  の円周上を偏角 0 まで戻り (積分路  $C_1$ ) 実軸上を  $|z_0|$  より  $|z|$  まで動き、さらに半径  $|z|$  の円周上を正の向きにまわって  $z$  に至る道 (積分路  $C_2$ ) を考え、そこで積分しよう。この積分路を  $L_0$  とする。すると

$$F(z) = \int_{z_0(L_0)}^z \frac{1}{\xi} d\xi = \int_{C_1} \frac{1}{\xi} d\xi + \int_{|z_0|}^{|z|} \frac{1}{x} dx + \int_{C_2} \frac{1}{\xi} d\xi$$

である。それぞれの積分は

$$\int_{C_1} \frac{1}{\xi} d\xi = -i \arg z_0 \quad (0 \leq \arg z_0 \leq 2\pi),$$

$$\int_{|z_0|}^{|z|} \frac{1}{x} dx = \ln |z| - \ln |z_0|,$$

$$\int_{C_2} \frac{1}{\xi} d\xi = i \arg z \quad (0 \leq \arg z \leq 2\pi),$$

したがって

$$\int_{z_0(L_0)}^z \frac{1}{\xi} d\xi = \{\ln |z| + i \arg z\} - \{\ln |z_0| + i \arg z_0\} \quad (5.51)$$

$$; \quad 0 \leq \arg z \leq 2\pi$$

となる。これが  $1/z$  の原始関数である。ここで積分路をきちんと定義して積分を行なったことに注意しなくてはならない。

次に同じく  $z_0$  から  $z$  に至る道を考えるが今度は原点を1回正の向きにまわったあとで  $z$  にむかうことにしよう (図 5.10(b))。この道を  $L_1$  とする。この積分路で始点は  $0 \leq \arg z_0 \leq 2\pi$  であり終点は  $2\pi \leq \arg z \leq 4\pi$  である。

$$\begin{aligned} \int_{z_0(L_1)}^z \frac{1}{\xi} d\xi &= \int_{\arg \xi = \arg z_0}^{\arg \xi = 2\pi} \frac{1}{\xi} d\xi + \int_{|z_0|}^{|z|} \frac{1}{x} dx + \int_{\arg \xi = 2\pi}^{\arg \xi = \arg z} \frac{1}{\xi} d\xi \\ &= i(2\pi - \arg z_0) + \ln |z| - \ln |z_0| + i(\arg z - 2\pi) \\ &= \{\ln |z| + i \arg z\} - \{\ln |z_0| + i \arg z_0\} \\ &\quad : 2\pi \leq \arg z \leq 4\pi \end{aligned} \quad (5.52)$$

である。原点を正の方向に  $n$  回まわった道を  $L_n$  とする。  $L_n$  上の積分も

$$\begin{aligned} \int_{z_0(L_n)}^z \frac{1}{\xi} d\xi &= \{\ln |z| + i \arg z\} - \{\ln |z_0| + i \arg z_0\} \\ &\quad ; 2n\pi \leq \arg z \leq 2(n+1)\pi \end{aligned} \quad (5.53)$$

である。以上の計算で  $\ln |z| + i \arg z$  ( $2n\pi \leq \arg z \leq 2(n+1)\pi$ ) の部分が  $\log z$  ( $0 \leq \arg z \leq 2\pi$ ) の多価性に対応している。つまり  $1/\xi$  を  $z_0$  から  $z$  まで積分するとき、積分路が原点を何回まわるかという道すじと対数関数  $\log z$  の多価性に対応している。

## 5.4 留数定理

### 5.4.1 留数定理

複素平面上のジョルダン閉曲線  $C$  があり、その内部に極が1個だけ存在する場合を考える。このとき  $C$  を正の方向に1周した積分路に沿った積分はゼロでない値を与えることがある。

例 31  $z = 0$  を (2位の) 極とした  $1/z^2$  を考える。これを円周  $|z| = r$  を積分路として積分する。  $z = re^{i\theta}$ ,  $dz = ire^{i\theta} d\theta$  であるから

$$\oint_{|z|=r} \frac{1}{z^2} dz = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{r^2 e^{i2\theta}} d\theta = \frac{i}{r} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta = -\frac{e^{-i\theta}}{r} \Big|_0^{2\pi} = 0. \quad (5.54)$$

この場合はゼロとなる。

例 32  $z = 0$  を (1 位の) 極とする  $1/z$  を考えて同じ積分をしよう。

$$\oint_{|z|=r} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i. \quad (5.55)$$

積分結果は半径  $r$  によらず、ゼロでない値  $2\pi i$  を与える。

例 33

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{z-1} + \frac{2}{z-2}. \quad (5.56)$$

$z = 1$ 、および  $z = 2$  が 1 位の極である。3 つの積分路を考えよう。

$C_1$ :  $z = 1$  を中心として半径 0.5 の円周。内側には  $z = 1$  のみを極として含む。

$C_2$ :  $z = 2$  を中心として半径 0.5 の円周。内側には  $z = 2$  のみを極として含む。

$C_3$ :  $z = 0$  を中心として半径 3 の円周。内側には  $z = 1, 2$  を極として含む。

積分路  $C_1$ : 内側に  $z = 1$  のみを極として含む。 $2/(z-2)$  については  $C_1$  内部は正則域だから積分は 0 になる。 $z-1 = 0.5e^{i\theta}$  であるから

$$\oint_{C_1} f(z) dz = -\int_0^{2\pi} \frac{i0.5e^{i\theta}}{0.5e^{i\theta}} d\theta + \oint_{C_1} \frac{2}{z-2} dz = -i \int_0^{2\pi} d\theta + 0 = -2\pi i.$$

積分路  $C_2$ :  $1/(z-1)$  については  $C_2$  内部は正則域だから積分は 0 である。 $z-2 = 0.5e^{i\theta}$  として

$$\oint_{C_2} f(z) dz = -\oint_{C_2} \frac{dz}{z-1} + 2 \int_0^{2\pi} \frac{i0.5e^{i\theta}}{0.5e^{i\theta}} d\theta = 0 + 2i \int_0^{2\pi} d\theta = 4\pi i.$$

積分路  $C_3$ : 定理 24 により

$$\oint_{C_3} f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz = 2\pi i \quad (5.57)$$

を得る。

ついでに次のいくつかの例を見てみよう。

例 34 半径  $r$  の円周上で  $z$  の偏角を 0 から  $2\pi$  まで  $z^{1/2}$  を積分してみよう。 $z^{1/2}$  は 2 価関数であるから、リーマン面上でこの積分路は閉じていない。 $z^{1/2}$  の偏角を定めておかないといけない。積分を  $\arg z = 0$  から  $\arg z = 2\pi$  まで円周  $|z| = r$  上の積分とする。 $z = re^{i\theta}$  であるから

$$\begin{aligned} \int_C z^{1/2} dz &= ir^{3/2} \int_0^{2\pi} e^{i\theta/2} e^{i\theta} d\theta = ir^{3/2} \frac{1}{3i/2} e^{i3\theta/2} \Big|_{\theta=0}^{2\pi} \\ &= \frac{2r^{3/2}}{3} (-1 - 1) = -\frac{4}{3} r^{3/2}. \end{aligned} \quad (5.58)$$

例 35  $f(z) = \exp(1/z)$  を円周  $|z| = 1$  上で正の向きに 1 周積分しよう。

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + \frac{1}{1!} \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \cdots + \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} + \cdots \quad (5.59)$$

を項別に積分して

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^n} = \begin{cases} 0 & : n \neq 1 \\ 2\pi i & : n = 1 \end{cases}$$

であるから

$$\oint_{|z|=1} \exp\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i \quad (5.60)$$

を得る。 $z = 0$  は真正特異点であることに注意しよう。

以上から、孤立特異点のまわりを 1 周積分するとゼロでない値を得る場合のあることが分かる。これを定理の形で述べておこう。

定義 32 留数: ジョルダン閉曲線  $C$  の内部に孤立特異点が 1 つだけあり、それを除くと  $C$  とその内部では  $f(z)$  は正則であるとする。孤立特異点  $z = z_0$  を 1 つだけ内部に見て正の向きに  $C$  をまわる積分路に沿う積分

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = A(z_0) \quad (5.61)$$

を  $f(z)$  の  $z = z_0$  における留数 (residue) という。留数を  $\text{Res}f(z)|_{z=z_0}$ ,  $\text{Res}f(z_0)$ ,  $\text{Res}(z_0)$  などと書く。留数は関数  $f(z)$  と点  $z_0$  のみによって決まる。

定理 26 孤立特異点  $z_0$  において極限值

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = A \quad (5.62)$$

が有限に確定するならば、 $A$  は  $z = z_0$  における  $f(z)$  の留数である。

(証明)  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = A$  が有限確定とする。任意の正数  $\varepsilon$  について、 $|z - z_0| < \delta$  となる  $\delta$  を適当にとれば

$$|(z - z_0) f(z) - A| < \varepsilon \quad (5.63)$$

である。 $z = z_0$ を1周する積分路  $C$ を、その内部に  $f(z)$  の孤立特異点を  $z_0$  しか含まないようにとる。積分路  $C$ を変形して

$$z - z_0 = \rho e^{i\theta} \quad (5.64)$$

とする。これは  $f(z)$  の正則領域での閉曲線の連続的な変更であるから積分の値は変わらず

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{|z-z_0|=\rho} f(z)dz \quad (5.65)$$

である。さらに  $dz = i\rho e^{i\theta}d\theta = i(z - z_0)d\theta$ であるから

$$\begin{aligned} & \left| \oint_{|z-z_0|=\rho} f(z)dz - 2\pi iA \right| = \left| i \int_0^{2\pi} (z - z_0)f(z)d\theta - 2\pi iA \right| \\ & = \left| \int_0^{2\pi} \{(z - z_0)f(z) - A\}d\theta \right| \leq \int_0^{2\pi} |(z - z_0)f(z) - A|d\theta \\ & < \varepsilon \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\varepsilon \end{aligned} \quad (5.66)$$

である。 $\varepsilon \rightarrow 0$  として

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi iA \quad (5.67)$$

を得る。したがって  $A$  は  $z = z_0$ における留数である。(証明終わり)

いつでも留数が定理 26の方法で求まるわけではない。いくつかの例を考えてみよう。

**例 36**  $f(z)$  が  $z = z_0$ の近傍で  $c_{-1} \neq 0$  として

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots \quad (5.68)$$

と書ける。このとき

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = c_{-1} \quad (5.69)$$

であるから  $f(z)$  の  $z = z_0$ における留数は  $c_{-1}$ である (1位の極)。

**例 37**  $f(z)$  が  $z = z_0$ の近傍で  $c_{-k} \neq 0, k \geq 2$  として

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + c_0 + c_1(z - z_0) \cdots \quad (5.70)$$

と展開されるとする ( $k$ 位の極), このとき

$$(z - z_0)f(z) \rightarrow \infty \quad (z \rightarrow z_0) \quad (5.71)$$

となり定理 26の方法では留数は求められない。

$z = z_0$ が  $f(z)$  の除去し得る孤立特異点の場合には

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f_0 \text{ (有限確定)} \quad (5.72)$$

であるから

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0 \quad (5.73)$$

となる。したがって  $z = z_0$ のまわりを 1 回まわる積分路  $C$  について定理 26 の証明と同様にして

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad (5.74)$$

である。

孤立特異点が真性 (孤立) 特異点の場合には  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$  は有限確定ではない。以上から定理 26 で  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$  が有限確定になるのは  $z = z_0$  が 1 位の極の場合である。

孤立特異点が  $k$ 位の極である場合、留数が一般にゼロまたは無限大等になるのではない。 $\oint_{|z|=1} (1/z^n) dz = 0 \quad (n \neq 1)$  であることから直接の積分により

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} f(z) dz = c_{-1} \quad (5.75)$$

となる。これが留数である。つまり孤立特異点  $z = z_0$  が  $k$ 位の極の場合にも  $z = z_0$  での留数は  $c_{-1}$  である。

公式 10  $k$ 位の極の留数:  $z = a$  が  $k$ 位の極であるならば

$$\text{Res } f(a) = c_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \{(z-a)^k f(z)\} \quad (5.76)$$

である。これは展開 (5.70) の具体的な形から直接示すことができる。

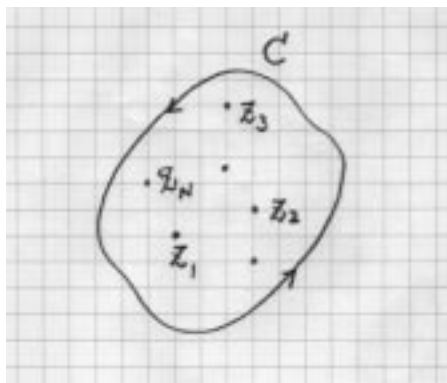


図 5.11 特異点が分布している場合.

例 38

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} \quad (5.77)$$

の極は  $z = 1, 2$  である。留数はそれぞれ

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)f(z) &= -1 \\ \lim_{z \rightarrow 2} (z-2)f(z) &= 2 \end{aligned} \quad (5.78)$$

となる。これが例 39 で考えたことであった。

定理 27 留数定理：正の向きにまわる閉じた積分路  $C$  の内側に  $f(z)$  の  $N$  個の極  $z_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) が存在し、それらを除いて積分路  $C$  およびその内側の領域で  $f(x)$  が 1 価正則であれば

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}(z_k) \quad (5.79)$$

である (図 5.11)。

(証明の概略) 積分路  $C$  をそれぞれの特異点  $z_k$  をまわる積分路  $C_k$  とそれらをつなぐ積分路に分けて考えればよい。

### 5.4.2 無限遠点の留数

これまでは原点から有限の距離だけ離れた孤立特異点のまわりでの留数を問題としてきた。無限遠点  $z = \infty$  も一般の  $z$  と同様に扱うことにしたから、その留数も定義しよう。

**定義 33** 無限遠点の留数:  $f(z)$  が  $R < |z| < +\infty$  で正則であるとき、すなわち無限遠点を除いて複素平面上で半径  $R$  の円の外側に特異点が存在しないとき、

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho>R} f(z) dz \quad (5.80)$$

を  $f(z)$  の  $z = \infty$  における留数といい、 $\text{Res}f(z)|_{z=\infty}$ ,  $\text{Res}f(\infty)$ ,  $\text{Res}(\infty)$  などとあらわす。ただし積分路は  $|z| = \rho$  の円周上を正の向きにまわる。

$|z| = \rho$  の円周上を原点から見て正の向きにまわるときには、無限遠点を常に右手に見ている。したがって無限遠点を中心に考えれば負の向きにまわっていることになる。そのため上の定義では係数にマイナスが付いている。

**定理 28**  $f(z)$  が  $R < |z| < \infty$  で正則であるとき  $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z)$  が有限確定であるなら

$$\text{Res}f(\infty) = - \lim_{z \rightarrow \infty} z f(z). \quad (5.81)$$

(証明)  $z = 1/\zeta$  と変数変換し、半径  $\rho (> R)$  の円周を考えると

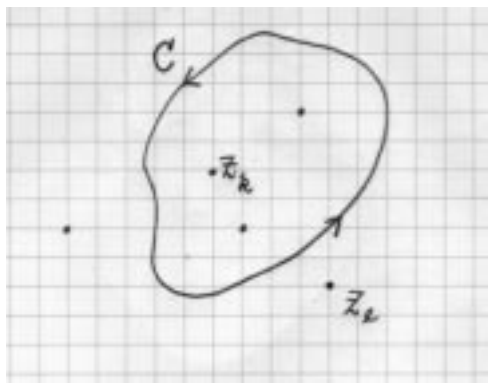
$$\text{Res}(\infty) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1/\rho} f\left(\frac{1}{\zeta}\right) \frac{-1}{\zeta^2} d\zeta. \quad (5.82)$$

ここで  $|z| = \rho$  の円周上を正の向きにまわる道筋は  $|\zeta| = 1/\rho$  の円周上を負の向きにまわる道筋に射影される。最後の式ではその積分路を  $|\zeta| = 1/\rho$  の円周上で正の向きにまわる積分路に書き換え、符号  $(-1)$  をかけている。

$f(1/\zeta)$  は  $\zeta = 0$  を除いて  $0 < |\zeta| < 1/R$  で正則であるから、 $F(\zeta) \equiv -f(1/\zeta)(1/\zeta^2)$  の特異点は存在するとするとそれは  $\zeta = 0$  である。つまり

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1/\rho} f\left(\frac{1}{\zeta}\right) \frac{-1}{\zeta^2} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1/\rho} F(\zeta) d\zeta = \text{Res}F(0) \quad (5.83)$$



図 5.12 閉曲線  $C$  と特異点.

は、 $\lim_{\zeta \rightarrow 0} \zeta F(\zeta)$  が有限確定であれば

$$\operatorname{Res} F(0) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \zeta F(\zeta) \quad (5.84)$$

である。故に

$$\operatorname{Res} F(0) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \zeta F(\zeta) = - \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} f(z) z^2 = - \lim_{z \rightarrow \infty} z f(z). \quad (5.85)$$

(証明終わり)

$f(z)$  が  $R \leq |z| \leq \infty$  で

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \quad (5.86)$$

と展開されるとする。

$$\oint_{|z|=\rho>0} z^n dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases} \quad (5.87)$$

であることを考えると

$$\operatorname{Res} f(\infty) = -c_{-1} \quad (5.88)$$

である。このことから、 $z = \infty$  が  $f(z)$  の正則点であっても留数  $\operatorname{Res}(\infty)$  は 0 とは限らないことが分かる。このことには注意せねばならない。

**定理 29** ジョルダン閉曲線  $C$  は  $f(z)$  の原点から有限の距離にある特異点を全て内側に含むとする。 $C$  の内側にある  $f(z)$  の特異点を  $\{z_k\}$ 、そこでの留数を

各々  $A_k$ 、無限遠点の留数を  $B_\infty$  とする。これらの特異点を除き  $f(z)$  は正則であるとする。このとき

$$\sum_k A_k + B_\infty = 0. \quad (5.89)$$

(証明) 閉曲線  $C$  をまわる複素積分は

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_k A_k \quad (5.90)$$

一方これはまた定義 (5.80) 式により  $\infty$  の留数も与える。

$$\oint_C f(z) dz = -2\pi i B_\infty. \quad (5.91)$$

故に  $\sum A_k + B_\infty = 0$  である。(証明終わり)

これが  $z = \infty$  が正則点である場合も、一般には  $B_\infty \neq 0$  であることの意味である。逆に  $f(z)$  の特異点が  $z = \infty$  であっても他に特異点がなければ  $B_\infty = 0$  である。

例 39

$$f(z) = e^z \quad (5.92)$$

は  $z = \infty$  を除いて全  $z$  平面上で正則である ( $z = \infty$  は真性特異点)。上の定理から  $z = \infty$  の留数は 0 である。 $f(z)$  を  $z$  のべき級数で展開すると

$$e^z = 1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n + \cdots \quad (5.93)$$

である。 $z^{-1}$  の項は現われないから  $z = \infty$  での留数はたしかに 0 である。

### 5.4.3 有理型関数と偏角の原理

留数の応用として重要な事項のいくつかを述べる。第3章で有理関数

$$f(z) = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m} \quad (5.94)$$

について述べた。 $z = \infty$  を含む全  $z$  平面で高々極以外の特異点を持たない(真性特異点を持たない)複素関数は、実は有理関数に限られる。

定義 34 有理型: ある領域で高々極以外の特異点を持たない複素関数を、その領域で有理型 (meromorphic) であるという。

定理 30 偏角の原理: 関数  $f(z)$  は単連結領域  $D$  で有理型、 $D$  内のジョルダン閉曲線  $C$  上には  $f(z)$  の零点も極もないとする。  $C$  の内部にある  $f(z)$  の零点と極およびその位数をそれぞれ零点  $a_1, a_2, \dots$ : 位数  $h_1, h_2, \dots$ 、極  $b_1, b_2, \dots$ : 位数  $k_1, k_2, \dots$  とすると

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi} \oint_C d(\arg f(z)) = \sum_j h_j - \sum_l k_l. \quad (5.95)$$

(証明)  $z = a$  が  $f(z)$  の零点または極であれば、 $z = a$  は  $f'(z)/f(z)$  の 1 位の極である。まずこのことを示そう。  $z = a$  が  $h$  位の零点であれば

$$f(z) = (z - a)^h g_1(z) \quad (5.96)$$

と書ける。ただし  $z = a$  は  $g_1(z)$  の零点ではない正則点である。故に

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{h}{z - a} + \frac{g_1'(z)}{g_1(z)} \quad (5.97)$$

となり、 $z = a$  は  $g_1'/g_1$  の正則点である。  $z = b$  が  $k$  位の極なら

$$f(z) = (z - b)^{-k} g_2(z) \quad (5.98)$$

と書け、 $z = b$  は  $g_2(z)$  の零点ではない正則点である。よって

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{k}{z - b} + \frac{g_2'(z)}{g_2(z)} \quad (5.99)$$

となり、 $z = b$  は  $g_2'/g_2$  の正則点である。これらの式 (5.97)(5.99) から直ちに

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum_j h_j - 2\pi i \sum_l k_l \quad (5.100)$$

が導かれる。

定理 30 の式 (5.95) の左辺にある  $f'(z)/f(z)$  は次の様に変形できる。

$$\frac{f'(z)}{f(z)} dz = d(\log f(z)) = d \ln |f(z)| + i d(\arg f(z)) \quad (5.101)$$

これから

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d(\ln |f(z)|) + \frac{1}{2\pi} \oint_C d(\arg f(z)) \quad (5.102)$$

である。右辺第一項は  $\ln |f(z)|$  が 1 価関数であるから 1 周積分で 0 となる。よって

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi} \oint_C d(\arg f(z)). \quad (5.103)$$

これにより、1 周積分の積分路に沿った  $f(z)$  の偏角の変化と積分路内の零点および極の位数とが関係づけられた。(証明終り)

**定理 31** ルーシェ (*Rouche*) の定理:  $f(z), g(z)$  の単連結な正則領域  $D$  内にジョルダン閉曲線  $C$  を考える。  $C$  上で

$$|f(z)| > |g(z)| \quad (5.104)$$

であるならば、 $f(z)$  と  $f(z) + g(z)$  とは、 $C$  の内部に位数だけ重複して数えて、同数の零点を持つ。

(証明)  $C$  の内部にある  $f(z)$  と  $f(z) + g(z)$  の零点の数の差は (極はないから)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \oint_C d(\arg(f(z) + g(z))) - \frac{1}{2\pi} \oint_C d(\arg f(z)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint_C d \arg \left( 1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right) \end{aligned} \quad (5.105)$$

である。<sup>3</sup>  $|f(z)| > |g(z)|$  であるから  $h(z) = 1 + g(z)/f(z)$  による  $C$  の像は右半平面上 ( $|h(z) - 1| < 1$  つまり  $h = 1$  を中心とし半径 1 の円の内側) にある。すなわち  $1 + g(z)/f(z)$  の像は原点 0 の周りをまわらない。故に

$$\oint_C d \arg \left( 1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right) = 0 \quad (5.106)$$

である。これにより  $f(z)$  と  $f(z) + g(z)$  の零点の数は (位数を重複して考えれば) 同じである。

<sup>3</sup> $h(z) = 1 + g(z)/f(z), w(z) = f(z) + g(z) = f(z)h(z)$  とする。  $\arg w(z) = \arg f(z) + \arg h(z)$  であるから  $\arg(f + g) - \arg f = \arg(1 + g/f)$ .

## 5.5 第5章問題

問1. 次の積分を行え。

$$(1) \int_1^i \sin z dz \quad (\text{積分路は直線}) \quad (2) \int_0^\infty e^{-x} \sin x dx \quad (3) \int_0^{1+i} e^z dz$$

問2. 次の積分を計算せよ。

$$(1) \oint_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{(z-1)^2} dz \quad (2) \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2(z-2)} \quad (3) \oint_{|z|=1} |z+1| |dz| \quad (4) \oint_{|z|=1} \frac{\cosh z}{z^2} dz$$

問3. 次の積分を行え。

$$(1) \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^6} \quad (2) \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{a+\sin^2 \theta} \quad (a > 0)$$

$$(3) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} \quad (a, b > 0) \quad (4) \int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} dx \quad (a, b > 0)$$

問4. 次の積分を行え。

$$(1) \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \quad (2) \text{Pv} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{itx}}{x} dx$$

問5. 次の関数の無限遠点における留数を求めよ。

$$(1) \frac{1}{z} \quad (2) z \quad (3) \frac{z}{z^2+1} \quad (4) \frac{z^3}{z^2+1}$$

問6. ルーシェの定理を用いて  $\sin z - 2z = 0$  の解は  $|z| \leq 1$  内には  $z = 0$  のみであることを示せ。

問7. 円  $|z| \leq 1$  内で、 $z^5 + 8z + 10 = 0$  の解の数はいくつあるか。

