第 4 章

特異点

展望：

複素解析の目的は、正則関数の性質を知ることあるいは複素関数の正則領域での性質を知ることである。関数の正則領域における性質は、関数の正則でない領域あるいは点の性質と密接に結びついている。したがって正則領域での性質を知ることは、複素関数が正則でない点や正則でない領域の近傍における性質を知ることでもある。複素関数の正則である点を正則点といい、正則でない点を特異点（singular point）という。

既に学んだように、複素関数が正則であるとは、その点 z で関数が微分可能であることである。微分不可能であるときには、その点で微分操作の極限が無限大に発散する場合だけでなく、分岐点のように関数の値が不定になりその微分係数の値が定まらない場合もある。このような場合も含めて関数の性質を理解する上でリーマン面の構造が重要であり、 逆にリーマン面はこのような関数の性質を理解しやすくするように構成されている。本書では詳しく触れないが、特異点は一般に孤立しているとは限らない。無限個の特異点が集積している $\mathrm{cosec}(1/z)$ における $z = 1/(n\pi)$ のような点もある。

複素関数を特異点の近くでベキ級数で表すと特異点の違いによってベキ級数の形が全く異なってくる。なるべく多くの例に触れることによって特異点の形になれるようにこころがけることにしたい。ベキ級数の形については第 7 章で詳しく述べる。

4.1 孤立特異点

定義 26 孤立特異点： z 平面上 $z = a$ の近傍 $0 < |z - a| < R$ で *1* 価正則な関数 $f(z)$ が、$z = a$ で正則でないとき、 $z = a$ を $f(z)$ の孤立特異点（*isolated singularity*）という。

孤立特異点を次の 3 つに区別する。

4.1.1 除き得る特異点

定義 27 除き得る特異点： $f(z)$ が *1* 点 $z = z_0$を除いて一価正則かつ絶対値 $|f(z)|$ が有界である場合には、これを**除き得る特異点**という。

この時には、あらためて

$$f(z_0) \equiv \lim_{z \to z_0} f(z) \tag{4.1}$$

と定義しなおすことによって、$f(z)$ を $z = z_0$を含む領域で一価正則にすることができる。すなわち特異点 $z = z_0$を除くことができる。

例 24

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} \tag{4.2}$$

は $z = 0$ では定義されないが

$$\lim_{z \to 0} f(z) = 1 \tag{4.3}$$

であり、$f(z)$ は $z = 0$ を除いて有界かつ一価正則である。このとき

$$f(z) = \begin{cases} \sin z/z & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

と定義しなおしてやれば、$f(z)$ は $z = 0$ を含む有限の領域で一価正則となる。

4.1.2　極

定義 28 極： $f(z)$ が $z = z_0$ の近傍で一価正則で、$z \to z_0$ の近づけ方によらず

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty \tag{4.5}$$

である場合、$z = z_0$を極（$pole$）という。

たとえば、z_0 を除いて $z = z_0$ の近傍で

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots \ : \quad (a_{-k} \neq 0) \tag{4.6}$$

である場合、$z = z_0$を k位の極という。実際多くの関数は式（4.6）の様に展開される。ベキ級数の形の一般的論については 7 章 7.3 で説明する。孤立特異点が極である場合、極の位数は重要である。

4.1.3　真性（孤立）特異点

定義 29 真性（孤立）特異点： $f(z)$ が $z = z_0$ を除いてその近傍で一価正則であり、$z = z_0$ 近傍で有界ではないが $z = z_0$が極でもないとき（$z \to z_0$ の極限のとり方により ∞ を含めていろいろな値をとる)、$z = z_0$を $f(z)$ の真性（孤立）特異点という。

z_0が真性（孤立）特異点である場合、z_0に収束する数列 $\{z_n\}$ を適当にとると $f(z_n)$ は無限大を含めて任意の複素数値をとる（ワイエルシュトラス (Weierstrass) の定理)。真性（孤立）特異点の具体例としては、例えば z_0 を除いて $z = z_0$ の近傍で

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \\ &= \cdots + \frac{a_n}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots \end{aligned} \tag{4.7}$$

と書けて、$a_{-n} \neq 0 (n > 0)$ となる負べき項が無限にあるときの z_0 がこれである。真性（孤立）特異点がいつも式（4.7）のように書けることの一般論は 7 章 7.3 で行なう。

ここでワイエルシュトラスの定理を証明しよう。

定理 19 ワイエルシュトラスの定理： $z = z_0$ が $f(z)$ の真性（孤立）特異点なら、z_0 の近傍の任意に小さい領域 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内で、$f(z)$ は任意の複素数値 γ にいくらでも近い値をとる。

γを任意の複素数とすると、任意の正数εに対して適当な正数δが存在し、$0 < |z - z_0| < \delta$に対して $|f(z) - \gamma| < \varepsilon$となることを示せばよい。これを否定してみよう。$0 < |z - z_0| < \delta$であるとき、ある値 $m > 0$ に対して $|f(z) - \beta| \geq m$ であるようなある複素数値 β が存在するとする。このとき

$$\phi(z) \equiv \frac{1}{f(z) - \beta} \tag{4.8}$$

は領域 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内で $|\phi(z)| \leq 1/m$ である。すなわち$\phi(z)$ は $z = z_0$ を除くその近傍で正則で有界である。故に、$\lim_{z \to z_0} \phi(z)$ は有界な値に収束する。ここで

$$f(z) = \beta + \frac{1}{\phi(z)} \tag{4.9}$$

を考える。(1) $\phi(z) \to 0 \quad (z \to z_0)$ なら $|f(z)|$ は無限大に発散、また (2) $\phi(z) \to$（0 でない有界値）$(z \to z_0)$ なら $f(z)$ は収束する。z_0 は 第 1 の場合は極、第 2 の場合には除き得る特異点となる。よって真性（孤立）特異点の定義と矛盾する。（証明おわり）

証明なしでワイエルシュトラスの定理よりさらに厳しい定理をあげておこう。

定理 20 ピカール (Picard) **の定理***:* $f(z)$ が $0 < |z - z_0| < \rho$ で *1* 価正則で、$z = z_0$が真性（孤立）特異点であるならば、$f(z)$ は高々*1* つの値を除きすべての有限な複素数値をこの領域内で無限回とる。

例 25

$$f(z) = \exp(\frac{1}{z}) \tag{4.10}$$

を考えよう。これは $z = 0$ の近傍で

$$f(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots + \frac{1}{z^n} + \cdots \tag{4.11}$$

と展開されるから $z = 0$ は真性（孤立）特異点である。a を任意の複素数値とする。$f(z) = a$ とする zは

$$z_n = \frac{1}{\log a} = \frac{1}{\ln|a| + \mathrm{i}(\arg a + 2\pi n)} \tag{4.12}$$

となる。すなわち点列 $\{z_n\}$ 上で $f(z)$ は値 a をとる。$n \to \infty$ とすると $z_n \to 0$ である。ただし $f(z)$ は 0 となることだけはない。したがって $\exp(1/z)$ は $z = 0$ の近傍で 0 を除いた任意の複素数値を無限回とる。

例 26 e^z, $\sin z$などでは $z = \infty$ は真性（孤立）特異点になっている

上に述べた真性（孤立）特異点以外にも真性特異点が存在することを付け加えておく。たとえば

$$f(z) = \mathrm{cosec}\frac{1}{z} \tag{4.13}$$

の特異点は $z = 1/n\pi$ $(n = \pm1, \pm2, \cdots)$ で、これは n が有限の値であれば 1 位の極である。$z = 0$ の近傍にこれらの特異点は無数に存在する。$z = 0$ を中心として特異点を内部に含まないような円を考えることはできない。このような点 $z = 0$ を**集積特異点**といい、やはり真性特異点の 1 つに数える。集積特異点の近傍では（4.7）のような展開はできない。

4.2　分岐点

関数 $w = f(z)$ を考える。べき乗根あるいは対数関数で見てきたように、複素 z平面上で $z = z_0$の周りを 2πだけ周って元の点に戻っても、wが元の値に戻らない点 z_0 を分岐点（branch point）という。もう少し詳しく分岐点を見てみよう。

例 27 $w = f(z) = z^{1/2}$を考える。$z = 1$ の点を始点として zを動かす（図 *4.1*）。この関数は *2* 価関数だから、$z = 1$ の偏角としては 0 と 2πを考えることができる。したがって $1^{1/2}$ は 1（偏角 0）か -1（偏角 π）である。
（*1*）まず $z = 1$ のとき $z^{1/2}$の偏角は 0 と決める（A 点)。(これは $z = 1$ といった時、偏角 0 の方を選んだことを意味している。）$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$と書いて$\theta$を 0 から増していく。

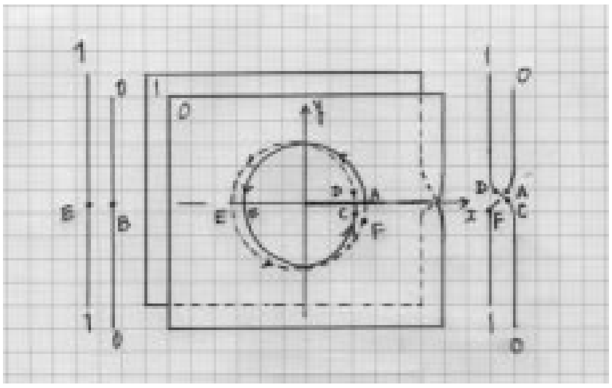

図 4.1 $z^{1/2}$の切断とリーマン面

(*2*) z が原点の周りを π だけ周り、$\arg z=\pi$となると $(-1)^{1/2}=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi})^{1/2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}=\mathrm{i}$ となる（B 点)。

(*3*) さらに z が原点の周りを π だけ廻って $\arg z=2\pi,\ z=1$ となると $(1)^{1/2}=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi})^{1/2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-1$ である（C 点）。ここで、$z=1$ であるが $(1)^{1/2}=-1$ である方（D 点）につながった。

(*4*) さらに原点の周りを一回り廻って $\arg z=4\pi,\ z=1$ とすると $(1)^{1/2}=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi})^{1/2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}=1$ となり（F 点)、出発の値（A 点）に戻る。

上の例、$z^{1/2}$では$z=0$の周りを2回廻って関数値が元の値に戻った。ここでzの偏角は0から4πまで変化したが、$0<\arg z\leq 2\pi$の点と$2\pi<\arg z\leq 4\pi$の点は z 平面上で同じであっても関数値 $f(z)=z^{1/2}$は違う。この2組の zを別のものと考えて、$0<\arg z\leq 2\pi$に対応する z 平面と $2\pi<\arg z\leq 4\pi$ に対応する z平面の2つの z平面を考えるのがリーマン面である。$z^{1/2}$ では z 平面が2つあるから2葉リーマン面と呼ぶ。$z^{1/2}$ の分岐点は $z=0$ と $z=\infty$ がある。2つの z 平面で、2つの分岐点 $z=0$ と $z=\infty$ の間に切り込み（切断= branch-cut）を入れる。今は実軸の右半分を切断とするが、原点から始まり無限遠に至るどのような曲線であっても構わない。関数の値は第1の z 平面の $\arg z=2\pi$ と 第2の z平面の $\arg z=2\pi$ では同じであるからここはのりづけする。さらに第2の z平面の $\arg z=4\pi$ と 第1の z平面の $\arg z=0$ でも関数値は同じであるからここものりづけする。このようにして zと $z^{1/2}$ を1対1に対応づけるリーマン面が得られる。

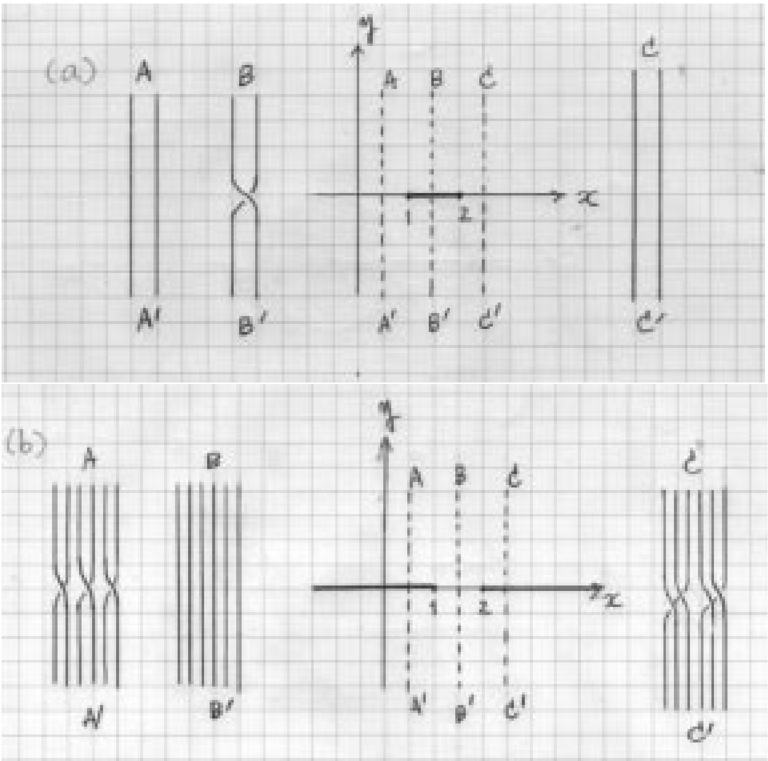

図 4.2 (a)$w=(z-1)^{1/2}(z-2)^{1/2}$のリーマン面, (b) $w=(z-1)^{1/2}(z-2)^{1/3}$のリーマン面.

例 28 分岐点がもっと沢山ある場合にはさらに複雑である。

$$w=(z-1)^{1/2}(z-2)^{1/2}$$

と

$$w=(z-1)^{1/2}(z-2)^{1/3}$$

を考えてみよう。

第 *1* の場合 $w=(z-1)^{1/2}(z-2)^{1/2}$ は $z=\infty$ は分岐点ではなく、$z=1,\ z=2$ のみが分岐点である。なぜなら $z=1/\zeta$ とすると

$$w=(\frac{1}{\zeta}-1)^{1/2}(\frac{1}{\zeta}-2)^{1/2}=\frac{1}{\zeta}(1-\zeta)^{1/2}(1-2\zeta)^{1/2}$$

であり、$\zeta=0\ \ (z=\infty)$ は分岐点ではなく極になっている。したがって切断としては $z=1$ と $z=2$ をつなぐ曲線を選べばよい。

第 2 の場合 $w=(z-1)^{1/2}(z-2)^{1/3}$は分岐点は $z=1,\ 2,\ \infty$ である。そのために切断は $z=1$ と $z=\infty$ を結ぶ曲線（$z=1$ から出て左側に延びる半直線）と $z=2$ と $z=\infty$ を結ぶ曲線（$z=2$ から出て右側に延びる半直線）の 2 つを選ぶ。$z=1$ および $z=2$ の周りはそれぞれ 2 回あるいは 3 回廻ると元の値に戻る。$z=\infty$ の周りは 6 回廻らないと元の値には戻らない。それをもう少し直接に見てみよう。$z=1/\zeta$ と変数変換すると、

$$w=(\frac{1}{\zeta}-1)^{1/2}(\frac{1}{\zeta}-2)^{1/3}=\frac{1}{\zeta^{5/6}}(1-\zeta)^{1/2}(1-2\zeta)^{1/3}$$

となる。 $\zeta=0$ つまり $z=\infty$ は分岐点となり $\zeta=0$ の周りでは 6 回廻って関数 w の偏角は元に戻る。したがって 6 枚の z平面が必要になり、それらを切断の部分でつないでゆく。

上の 2 つの場合のリーマン面をそれぞれ図 4.2に示した。第 1 の場合と第 2 の場合では似ているようだが分岐点は異なり、切断の入れ方がまったく違ってくる。

べき関数のべき指数が有理数であるとき、リーマン面を作る z平面は有限枚である。この場合の分岐点を**代数的分岐点**という。べき指数が有理数でないときおよび対数関数 $w=\log z$ などでは無限多価関数となり、無限枚の z平面がリーマン面を構成する。このような分岐点を**対数的分岐点**と呼ぶ。対数的分岐点の場合、リーマン面上で閉じた閉曲線を作るには分岐点を反対方向に同じ回数だけまわらなくてはならない。

4.3　第 4 章問題

問 1. $w = \tan z$の特異点を調べよ。

問 2. $w = \sin z$の特異点を調べよ。

問 3. $w = \sin(\frac{1}{z})$ の特異点を調べよ。

問 4. $w = 1/\sin(\frac{1}{z})$ の特異点を調べよ。

問 5. $w = (z-1)^{1/2}(z+1)^{-1/2}$の分岐点を調べ、リーマン面の構造を述べよ。$z$平面は w平面のどのような領域に写像されるか。

問 6. $w = z + (z^2 - 1)^{1/2}$の分岐点を調べ、リーマン面の構造を述べよ。

問 7. $w = (z-1)^{1/2} + (z+1)^{1/2}$の分岐点を調べ、リーマン面の構造を述べよ。