

第 2 章

複素関数と正則性

展望：

本章では複素解析、複素関数の性質の基本である連続性と微分可能性について述べる。実数変数に関する微分についてはすでに高校その他で学んでいるであろうが、その定義についてはさほど気を付ける必要はなかった。また微分の意味は接線（あるいは接平面）の勾配として直感的に理解することができた。このように視覚的に理解できるのは実変数の微積分学が歴史的に力学のための道具として発見されたことと無縁ではない。複素数を変数とする微分は同じように

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

と定義される。しかし z は複素数であるから、実変数による微分の時のように視覚的に理解できる「傾き」という意味はもはや無い。さらに z の変化分 $\Delta z = z - z_0$ をゼロにする極限操作にもいろいろなとり方が考えられる。例えば Δz の虚部をゼロにしたまま実部をゼロに近付ける（ z を z_0 に近付ける時、実軸に平行に動かす）、あるいはその逆に Δz の実部をゼロにしたまま虚部をゼロに近付ける（虚軸に平行に動かす）、または実部と虚部を同時にゼロにするなど様々なやり方が考えられる。実はこの極限の取り方に依存しない値が得られることが複素関数の微分を定義するために必要である。この要求は大変強いもので、複素関数のすべての性質はこの要求によって定まってしまう。先ずこのことに十分注意しながら本章を読み進んでほしい。

本章では最初に複素関数の連続性、微分を定義する。これらの定義から直接導かれる性質を議論すると共に、複素関数の大きな応用である等角写像に

ついて学ぶ。さらに簡単な応用として2次元の電磁気学および流体力学に触れることにする。

実関数の連続性や微分の概念の形成にはニュートン (1642-1727) やライブニッツ (1646-1716) を必要とした。複素関数の性質の研究は、ガウス (1777-1855)、コーシー (1789-1857)、リーマン (1826-1866) といった18世紀から19世紀にかけての大数学者達の華やかな活躍の場であった。

2.1 複素関数とその連続性

2.1.1 複素関数および連続の定義

定義 12 複素関数：複素 z 平面から複素 w 平面への写像が与えられたとき

$$w = f(z) \quad (2.1)$$

と書いて、 $f(z)$ を z の関数、あるいは複素関数という。

複素関数 $w = f(z)$ について、 z を z_0 に近づけたとき w が w_0 にいくらでも近づくなれば、すなわち任意の正数 ε に対して適当な正数 δ が存在し $0 < |z - z_0| < \delta$ であるすべての z において

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \quad (2.2)$$

が成り立つならば、

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \quad (2.3)$$

と書いて、 w_0 を「 w の $z \rightarrow z_0$ における極限值」という。

定義 13 複素関数の連続性： $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ のとき、すなわち任意の正数 ε に対して適当な正数 $\delta(\varepsilon)$ が存在して、

$$|z - z_0| < \delta(\varepsilon) \text{ である全ての } z \text{ について } |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \quad (2.4)$$

であるとき、「 $f(z)$ は $z = z_0$ で連続である」という。¹

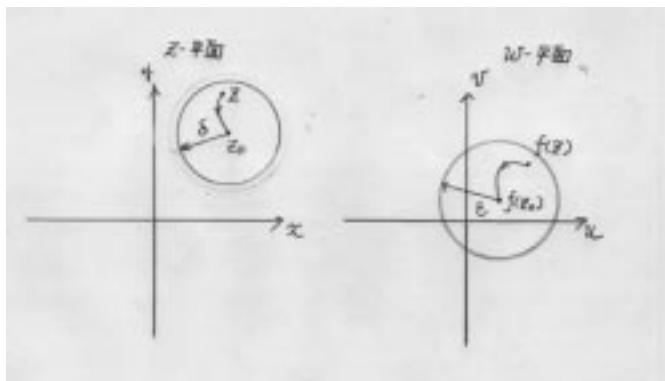


図 2.1 関数の連続性. 半径 δ の円内の点 z の写像 $w = f(z)$ は半径 ϵ の円内にある.

一般に 2次元ベクトル空間 (x, y) から 2次元ベクトル空間 (u, v) への写像は $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ と書ける。さらに $x = (z + \bar{z})/2$, $y = (z - \bar{z})/(2i)$ であるから、 $f = u(z, \bar{z}) + iv(z, \bar{z})$ と書くこともできる。我々が複素解析で問題にするのは \bar{z} を使わないと書けないような関数ではなく、 $|z|$ や \bar{z} を使わないで $w = f(z) = u(z) + iv(z)$ と書かれる関数である。たとえば $w_1 = z^2$ はこれから大いに問題にする。一方、 $w_2 = x^2 + y^2$ は $w_2 = z\bar{z} = |z|^2$ であるから z だけで \bar{z} や $|z|$ を用いず書くことはできない。このような関数にはあまり興味がない。²

公式 1 複素関数 $f(z)$, $g(z)$ に関して $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$ が存在するならば次の性質が成り立つ。

1. $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) + g(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$
2. $\lim_{z \rightarrow z_0} cf(z) = c \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$
3. $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z)g(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$
4. $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)}$ 、ただし $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0$

以上の証明は不要であろう。

¹ 「連続」とは日常的には鉄道の線路のようにずっと先まで続くことをいうが、数学では「細かく細かく」見ても「途切れていない」「跳びがない」ことを意味する。

² 興味がないといってもこれからの議論に絶対に出てこないということではない。これから議論する豊富な内容を持っているのは $w = f(z)$ と書ける関数だという意味である。

2.2 複素関数の微分可能性と正則関数

2.2.1 複素関数の微分

定義 14 微分: 複素 z 平面上 $z = z_0$ の近傍(適当な正数 δ に対して $|z - z_0| < \delta$ の領域) で定義された複素関数 $w = f(z)$ に関して

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (2.5)$$

が一意に存在する (有限確定) ならば、 $f(z)$ は $z = z_0$ で「微分可能」であるという。この量を微分係数または導関数と呼び、 $f'(z_0)$ あるいは $\left. \frac{df}{dz} \right|_{z=z_0}$ と書く。

$$f'(z_0) = \left. \frac{df}{dz} \right|_{z=z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (2.6)$$

ここでは z を z_0 に近づけるといったとき近づけ方を指定していない、すなわち近づけ方によらずどのような近づけ方をしてもこの極限值が一意に存在することを要求している。この要求は実は大変強いもので、複素解析の対象とする関数の性質がこれから述べるように豊富な内容を持つのはこの性質のためである。³

微分可能性の条件を次のように書くと便利である。

$$\begin{aligned} \Delta f &\equiv f(z + \Delta z) - f(z) = f'(z)\Delta z + \delta\Delta z, \\ \text{ただし } \delta &\rightarrow 0 \ (\Delta z \rightarrow 0). \end{aligned} \quad (2.7)$$

定義 15 正則: 領域 D の任意の点で微分可能な関数を「領域 D で正則 (regular, holomorphic) 」という。また複素関数 $f(z)$ が「点 z_0 で正則」であるとは「点 z_0 の近傍の各点で微分可能」なことをいい、点 z_0 を関数 $f(z)$ の正則点と呼ぶ。また関数 $f(z)$ が $z = z_0$ で正則でないとき、点 z_0 を特異点という。

例 10 べき乗 z^n の微分は、2 項展開の公式

$$(z + \Delta z)^n = z^n + n z^{n-1} \Delta z + \frac{1}{2} n(n-1) z^{n-2} (\Delta z)^2 \cdots$$

³自然現象を記述する関数は多くの場合に微分可能な関数である。もし変数を複素数まで拡張して定義することができれば、逆にその関数の性質の一般的側面を捉えることが可能であり、その現象の一般的性質をはっきり理解することができる。

より

$$\frac{dz^n}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = nz^{n-1}$$

となる。

例 11 べき根 $z^{1/n}$ の微分は $(z + \Delta z)^{1/n} = a$, $z^{1/n} = b$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{(z + \Delta z)^{1/n} - z^{1/n}}{\Delta z} &= \frac{a - b}{a^n - b^n} \\ &= \frac{a - b}{(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})} \end{aligned}$$

より

$$\frac{dz^{1/n}}{dz} = \lim_{a \rightarrow b} \frac{1}{a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}} = \frac{1}{n} z^{(1/n)-1}$$

となる。また $z^{1/n}$ は $z = 0$ では微分不可能である。

公式 2 複素関数の微分の諸公式をあげておこう。

1.

$$\frac{d}{dz} \{cf(z)\} = c \frac{df(z)}{dz}$$

2.

$$\frac{d}{dz} \{f(z) + g(z)\} = \frac{df(z)}{dz} + \frac{dg(z)}{dz}$$

3.

$$\frac{d}{dz} \{f(z)g(z)\} = \frac{df(z)}{dz}g(z) + f(z)\frac{dg(z)}{dz}$$

4.

$$\frac{d}{dz} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\frac{df(z)}{dz}g(z) - f(z)\frac{dg(z)}{dz}}{g^2(z)}$$

5. 合成関数の微分: $g(z)$ は $z = z_0$ で微分可能、 $f(w)$ は $w = w_0 = g(z_0)$ で微分可能であるとき、 $f(g(z))$ は $z = z_0$ で微分可能で

$$\frac{df(g(z_0))}{dz} = \frac{df(w(z_0))}{dw} \frac{dg(z_0)}{dz} \quad (2.8)$$

である。

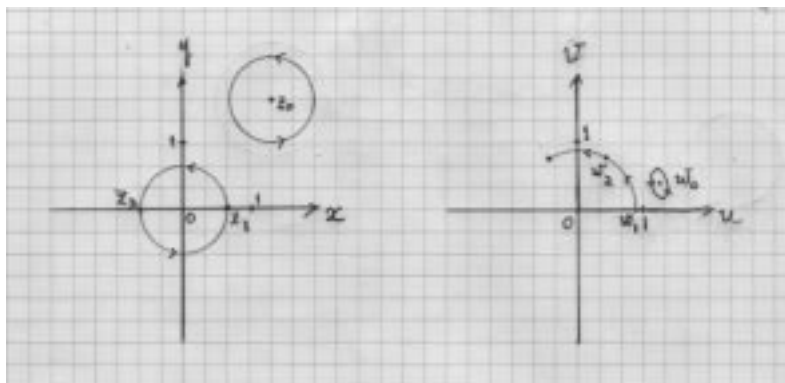


図 2.2 $w = z^{1/3}$ の振舞い.

これらの証明は実関数のときと形式的にまったく同じである。最後の合成関数 $f(g(z))$ の場合のみ証明しておこう。他の公式も定義から、あるいは以下の証明に倣ってできる。 g の変動 Δg に対する f の変動を Δf などと書けば微分可能性により

$$\Delta f = f'(g)\Delta g + \gamma\Delta g$$

$$\Delta g = g'(z)\Delta z + \gamma'\Delta z$$

と書ける。ここで $\Delta g \rightarrow 0$ のとき $\gamma \rightarrow 0$ 、および $\Delta z \rightarrow 0$ のとき $\gamma' \rightarrow 0$ となる。したがって

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = (f'(g) + \gamma)(g'(z) + \gamma') = f'(g)g'(z) + (f'(g)\gamma' + \gamma g'(z) + \gamma\gamma')$$

である。上で最後の括弧内の式は $\Delta z \rightarrow 0$ のとき 0 になるから式 (2.8) が導かれる。

公式 3 有理数べきのべき根 $z^{m/n}$ (n, m は自然数で $n \neq m$) に関しては

$$\frac{dz^{m/n}}{dz} = \frac{m}{n} z^{(m/n)-1} \quad (2.9)$$

である。

式 (2.9) は、 $f(w) = w^m$, $g(z) = z^{1/n}$ としてべき根の微分と合成関数の微分により容易に導くことができる。 $z = \rho e^{i\theta}$ として偏角 θ を 0 から 2π まで動かしてみると関数 $z^{m/n}$ は $\theta = 0$ のところと $\theta = 2\pi$ のところとは連続につながらな

い(図 2.2)。 $z^{m/n}$ は複素 z 平面上で 1 価ではないからである。このため $z = 0$ の近傍では $z = z_1$ での値 $z_1^{m/n}$ を一意に定めても、 z_1 をわずかに動かした点 z_2 での値 $z_2^{m/n}$ が一意に定まらないことがある。 z_1 から z_2 に動かす途中 $z = 0$ を通れば、そこで z の偏角が不定になるからである。 $z^{m/n}$ についてのこのような事情は原点の近傍に限られる。原点から有限の距離だけ離れた点では、点をその近傍で動かしても値の一意性がこわれるなどという困難はない。したがってべき根の関数 $z^{m/n}$ は $z = 0$ では正則でない。⁴

以上いくつかの例から、複素関数の微分公式は実関数のそれと同じであるといえる。

2.2.2 コーシー・リーマンの関係式と調和関数

正則関数とは考えている領域で微分可能な関数であった。実関数のときは微分可能性というのはそれほど強い条件とは思えなかつただろうが、複素関数では $z \rightarrow z_0$ の近づけ方によらないということは大変に強い条件で、これ 1 つから沢山の基本的性質が導かれる。

正則関数であるための 1 つの必要充分条件をあたえるのが以下に見るコーシー・リーマンの関係式である。これを見ると正則関数というのが如何に強い条件になっているかが分かってくるであろう。

定理 13 コーシー・リーマンの関係式： $f = u + iv$ の実部および虚部が $z = z_0$ の近傍で x および y に関して連続 1 回微分可能であるとき、 $f(z) = u + iv$ が正則であるための必要十分条件は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.10)$$

を満たすことである。上の式をコーシー・リーマン (Cauchy-Riemann) の関係式という。

コーシー・リーマンの関係式の証明は簡単である。基本は $z \rightarrow z_0$ の近づけ方によらないということであるから、 $z + \Delta z$ を z に近づけるとき $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$

⁴有理数べき根 $z^{m/n}$ に留まらず無理数べきについても全く同じであるが、ここではまだ無理数べきの定義をしていない。

として

$$(1) \quad \Delta x \rightarrow 0, \quad \Delta y = 0$$

$$(2) \quad \Delta x = 0, \quad \Delta y \rightarrow 0$$

の2つの近づけ方で微分を考えてみよう。其々を書下して

$$\begin{aligned} (1) \quad f'(z) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right\} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \\ (2) \quad f'(z) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left\{ \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y} \right\} \\ &= -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.11)$$

となる。この両式の最後の項で実部虚部を比較して

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

を得る。これで必要条件が示された。

次に充分条件を考えよう。偏微分係数 u_x, u_y, v_x, v_y が連続で (2.10) を満足するとする。このとき偏微分の定義より

$$\begin{aligned} u &= u_0 + a\Delta x + b\Delta y + \varepsilon \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\ v &= v_0 - b\Delta x + a\Delta y + \varepsilon' \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \end{aligned}$$

である。 $\varepsilon, \varepsilon'$ は $|\Delta z| \rightarrow 0$ のときゼロとなる。 $f = u + iv$ より

$$f = f_0 + (a - ib)\Delta z + \varepsilon'' \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

ただし $|\Delta z| \rightarrow 0$ のとき $\varepsilon'' \rightarrow 0$ となる。これから

$$f' = a - ib$$

であり、微分が存在する。これで充分条件も証明できた。

上の条件は実は少しきつ過ぎる。もう少し緩めて、「 $f = u + iv$ が正則であるための必要充分条件は、 u, v が全微分可能(したがって偏微分可能)かつコーシー・リーマンの関係式が成り立つことである。」としても良い。⁵ ここでは条件をきつくしておいたほうが証明は容易であるし、實際上支障がないのでそのようにしておく。

例 12 簡単な例を見よう。複素平面上原点から有限な距離にあるどの点においても微分可能である正則関数 $f(z) = z^2$ の実部と虚部はそれぞれ $u(x, y) = x^2 - y^2, v(x, y) = 2xy$ である。この u, v はコーシー・リーマンの関係式を満足する。

7章 7.2 (グルサの定理) で示すように正則関数は実は無限回連続微分可能である。すなわち正則関数の実部 u 虚部 v はそれぞれ x, y で無限回連続微分可能となる。このことを証明する準備は整っていないので、しばらくはそのまま認めておくことにしよう。コーシー・リーマンの関係式をもう一度微分すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\end{aligned}$$

となり、これらの両辺を足せば

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2.12)$$

を得る。同様に $v(x, y)$ についても

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (2.13)$$

となる。これは2次元ラプラス方程式である。ラプラス方程式を満足する関数を調和関数という。すなわち、正則関数の実部 u, v はそれぞれ(2次元)調和関数である。

⁵ $u(x, y)$ が (x, y) で全微分可能であるとは $\Delta u \equiv u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) = a\Delta x + b\Delta y + \varepsilon\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ とかけ、 a, b は $\Delta x, \Delta y$ に関係せず、かつ $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \rightarrow 0$ のとき $\varepsilon \rightarrow 0$ となることをいう。

定義 16 調和関数：2次元ラプラス方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2.14)$$

を満足する関数を調和関数という。

コーシー・リーマンの関係式によれば、正則関数の実部または虚部の一方を定めれば、他方は定数項を除いて定まる。調和関数についていえば、1つの調和関数 $u(x, y)$ が決まれば、それと組になって正則関数 $f(z) = u + iv$ を作るもうひとつの調和関数 $v(x, y)$ が決まる。 u, v を夫々他方に対して「共役な調和関数」と呼ぶことがある。

例 13 正則関数 $f(z) = u + iv$ の実部が $u(x, y) = x^2 - y^2$ であるとする。

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u = 2 - 2 = 0$$

であるから u は調和関数であることが確かめられる。 u を実部とする正則関数の虚部 v はコーシー・リーマンの関係式から

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x} = 2x \end{aligned}$$

を満足しなくてはならない。これを積分すれば

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \int^x dx(2y) = 2xy + \phi(y) \\ &= \int^y dy(2x) = 2xy + \psi(x) \end{aligned}$$

と求められる。これから $\phi(y) = \psi(x) = \text{定数}$ となる。よって定数を除いて $f(z) = (x^2 - y^2) + i2xy = z^2$ と定まる。

コーシー・リーマンの関係式と合成関数の微分公式から次の「逆関数定理」が導かれる。

定理 14 逆関数定理： $f(z)$ が $z = z_0$ で正則で $f'(z_0) \neq 0$ とする。このとき $z = z_0$ の近傍で $w = f(z)$ の逆関数 $z = g(w)$ が存在し

$$\frac{df}{dz} = 1 / \frac{dg}{dw} \quad (2.15)$$

が成り立つ。

(証明) この定理の証明は 2 段階で行なう。第 1 は逆関数の存在、第 2 はその微分公式の適用である。2 変数 x, y の関数 $f = u + iv$

$$\begin{aligned} u &= u(x, y) \\ v &= v(x, y) \end{aligned} \quad (2.16)$$

を考える。関数行列式 (ヤコビアン)

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = J \quad (2.17)$$

がゼロでないとき ($J \neq 0$)、上の関係の逆写像

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \end{aligned} \quad (2.18)$$

が一意的に確定、すなわち逆関数が存在する。関数行列式はコーシー・リーマンの関係式を用いて

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2$$

となるから $f'(z) \neq 0$ が必要充分条件となる。これで第 1 段階は終わった。

第 2 段階は $f(z)$ と逆関数 $g(w)$ との関係

$$w = f(g(w))$$

に対して合成関数の微分公式を適用すると

$$1 = \frac{dw}{dw} = \frac{df}{dz} \frac{dg}{dw} \quad (2.19)$$

となり求める式が得られた。(証明終わり)

2.2.3 電磁気学、流体力学への調和関数の応用

ラプラス方程式を満足する関数を調和関数と呼ぶ。すなわち、正則関数の実部 u 、 v はそれぞれ (2 次元) 調和関数である。ラプラス方程式は電磁気学で電荷がない領域での静電ポテンシャルの式、流体力学の流れのポテンシャルの式などさまざまところで顔を出してくるので、調和関数は大変重要である。

例 14 静電ポテンシャルと電気力線：空間電荷がない領域での静電ポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ はラプラス方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi(\mathbf{r}) = 0$$

を満たさなくてはならない。点 \mathbf{r} に電荷 q を持つ質点をおいたときにそれに働く力 \mathbf{F} は静電ポテンシャルの勾配 $\text{grad}\phi$ で表すことができる。

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -q\text{grad}\phi(\mathbf{r}) = -q\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\phi(\mathbf{r})$$

各点でのポテンシャルの傾き、すなわち最大傾斜の方向と傾斜の大きさを持ったベクトルを電場ベクトル \mathbf{E} という。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad}\phi(\mathbf{r}) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\phi(\mathbf{r})$$

電場ベクトルを表す矢印を空間に描いてそれを連続的につなぎあわせたものを電気力線という。電気力線は電場の方向に沿っていて、 $\phi(\mathbf{r}) = \text{一定}$ の曲面に垂直に交わり、電気力線の密度は電場の強さ（電場ベクトルの大きさ）に比例する。したがって荷電粒子に働く力の方向と大きさを電気力線が表している。

$\phi(\mathbf{r})$ が z によらない 2 次元静電ポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ および電場ベクトル $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ はそれぞれ

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi(\mathbf{r}) = 0$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad}\phi(\mathbf{r}) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\phi(\mathbf{r})$$

となる。静電ポテンシャル $\phi(x, y)$ は (2 次元) 調和関数となる。また静電ポテンシャルの勾配（に符号を変えたベクトル）が電場ベクトルを表す。 ϕ を実部とする正則関数の虚部 $\psi(x, y)$ の勾配は、コーシー・リーマンの関係式

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\psi(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y}\phi(x, y) = -\frac{\partial}{\partial x}\psi(x, y)$$

を満足せねばならないから電場ベクトルに直交（電気力線に直交）する。したがって $\psi = \text{一定}$ となる曲線が電気力線を定め、 $\phi = \text{一定}$ となる曲線と直交する。

例 15 渦無しの流れと速度ポテンシャル：流体の速度場のベクトル（速度ベクトル）を $v(\mathbf{r})$ とするとき、 $\omega(\mathbf{r}) = \text{rot} v$ を渦度といい、渦の流れを表す。 $\omega = 0$ のとき渦無しの流れという。 $\text{rot} v = 0$ であるとき、 v は $v = \text{grad} \Phi$ と書かれる関数 Φ から導くことができる。この Φ を速度ポテンシャルという。流れの質量密度を ρ 、時間を t として、連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0$$

が成り立つ。縮まない流体では $\rho = \text{const}$ であるから

$$\text{div} v = 0 \Rightarrow \text{div} \text{grad} \Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi = 0$$

となり速度ポテンシャル Φ はラプラス方程式の解となる。

v が x, y にのみ依存し z には依らない 2 次元の流れ v を考えよう。速度ポテンシャル Φ は 2 次元のラプラス方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi = 0$$

を満足し、流れの速度場は

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

となる。このとき図 2.3 に示すように空間に 1 点 A と任意の点 P を考える。曲線 C の A から P へ向かって引いた接線を時計まわりに 90 度回転させた方向に射影した v の成分を v_n とする。非圧縮性流体では、 A と P を結ぶ曲線 C をよぎって通過する流体の体積は

$$\Psi(P) = \int_A^P v_n ds$$

は曲線 C によらず点 P だけで決る。 A と P を結ぶ任意の 2 つの曲線 C と C' を考えると C を通って入った流れは縮まない以上 C' から必ず出ている筈だからである。この $\Psi(x, y)$ を流れの関数という。 $\Psi = \text{一定}$ である曲線を通過する流量は θ であるからこれが流線をあたえる。

定義から流れの関数 Ψ の微分は流れの速度となり $v_n = \partial \Psi / \partial s$ 、すなわち流れの関数がある方向に微分すればその方向からさらに時計周りに 90 度周っ

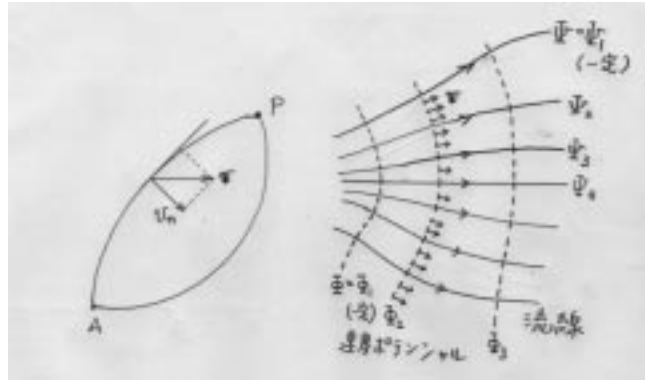


図 2.3 非圧縮性流体の流れの関数.

た方向の速度が求められる。したがって、微分の方向をそれぞれ x, y 方向にとると $-y, x$ 方向の速度 $-v_y, v_x$ となる。

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

流れの速度場の速度ポテンシャルによる式と流れの関数による式とを比べるとコーシー・リーマンの式になっていることが分かる。つまり Φ と Ψ をそれぞれ実部と虚部とする関数

$$f = \Phi + i\Psi$$

は $z = x + iy$ に関して正則関数で Φ と Ψ は調和関数である。 f を複素速度ポテンシャルという。

2.3 等角写像

2.3.1 等角写像の定義

領域 D で正則な関数 $w = f(z)$ について、 D 内の隣接した 3 点 z_i , ($i = 0, 1, 2$) を考える。 z_0 と z_i ($i = 1, 2$) を結んだ滑らかな曲線は f の連続性から同じく w_0 と w_i ($i = 1, 2$) を結んだ滑らかな曲線に写像される。

このとき z 平面上の点、 w 平面上の点のそれぞれの座標を z_0, w_0 を中心として

$$\begin{aligned} z_1 - z_0 &= r_1 e^{i\theta_1}, & z_2 - z_0 &= r_2 e^{i\theta_2} \\ w_1 - w_0 &= \rho_1 e^{i\phi_1}, & w_2 - w_0 &= \rho_2 e^{i\phi_2} \end{aligned} \quad (2.20)$$

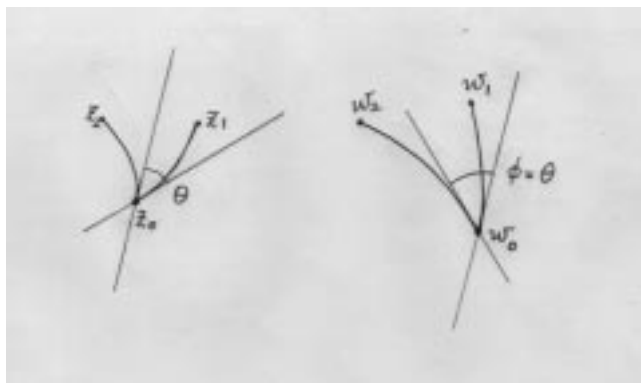


図 2.4 3点 z_i , ($i = 0, 1, 2$) と $w = f(z)$ によるその写像 w_i ($i = 0, 1, 2$) と等角性。

と表す。 $w = f(z)$ の正則性により

$$f'(z_0) = \lim_{z_1 \rightarrow z_0} \frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0} = \lim_{z_2 \rightarrow z_0} \frac{w_2 - w_0}{z_2 - z_0}$$

である。極表示で書き直すと

$$f'(z_0) = \lim_{r_1} \frac{\rho_1}{r_1} e^{i(\phi_1 - \theta_1)} = \lim_{r_2} \frac{\rho_2}{r_2} e^{i(\phi_2 - \theta_2)} \quad (2.21)$$

あるいは

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1}{r_1} e^{i(\phi_1 - \theta_1)} &= f'(z_0) + \gamma_1 \\ \frac{\rho_2}{r_2} e^{i(\phi_2 - \theta_2)} &= f'(z_0) + \gamma_2 \end{aligned} \quad (2.22)$$

である。ただし γ_1, γ_2 はともに $z \rightarrow z_0$ で r_1, r_2, ρ_1, ρ_2 などより早く 0 となる複素数である。したがって $z \rightarrow z_0$ の極限で

$$\lim_{r_1} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \lim_{r_1} \frac{r_2}{r_1}, \quad \lim(\phi_2 - \phi_1) = \lim(\theta_2 - \theta_1)$$

となる。言い換えると「 z_0 の近傍での微小 3 角形 $\Delta z_0 z_1 z_2$ は w_0 の近傍の相似な微小 3 角形 $\Delta w_0 w_1 w_2$ に写像される。」

$$\Delta z_0 z_1 z_2 \sim \Delta w_0 w_1 w_2 \quad (2.23)$$

式 (2.21) より直ぐに $|f'(z_0)|$ は相似図形の拡大率、 $\arg f'(z_0)$ は図形の回転角 ($\phi_1 - \theta_1$) であることが分かる。このような性質を、写像 $f(z)$ の「等角性」

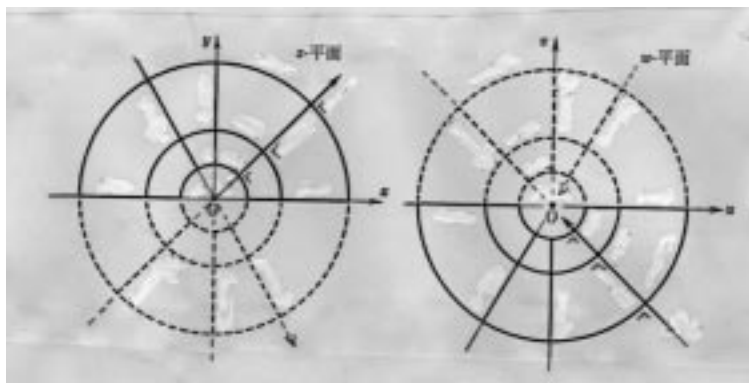


図 2.5 $w = \frac{1}{z}$.

といい、関数 $f(z)$ を等角 (conformal) であるといい、写像 $f(z)$ を等角写像という。ある道筋に沿って右 (左) にある領域は、像曲線の対応する道筋と同じ右 (左) 側に写像されることも上の説明から分かるであろう。

定義 17 等角：領域 D で定義された写像 $w = f(z)$ があって、点 z_0 を通る滑らかな任意の 2 曲線のなす角が、像点 w_0 を通る 2 像曲線がなす角と符号を含めて等しいとき、 $w = f(z)$ は z_0 で等角であるという。

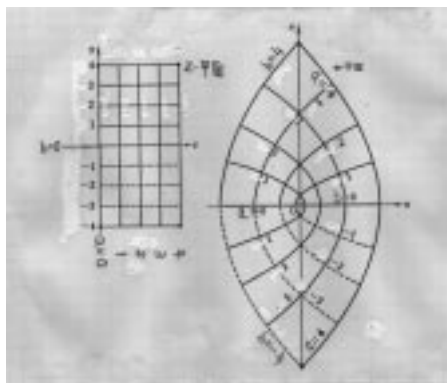
定理 15 関数 $f(z)$ が z_0 で正則で $f'(z_0) \neq 0$ であるなら、写像 $w = f(z)$ は z_0 で等角である。

これは上の等角性の説明の言い直しであるから特に改めて証明する必要はない。ただ、 $f'(z_0) = 0$ の場合には写像 $w = f(z)$ は $z = z_0$ で偏角が不定になってしまうので等角性が壊れることだけを注意しておこう。

例 16

$$w = \frac{1}{z}$$

この写像は $z = re^{i\theta}$ とすれば $w = (1/r)e^{-i\theta}$ であるから $z = 0$ を中心とする円は $w = 0$ を中心とする円に、 $z = 0$ から放射状に広がる直線群は $w = 0$ に集まる直線群に写像される。 z 平面上の直交曲線群は w 平面上の直交曲線群に写像され、 $z = 0$ を除いて写像の等角性が成立する (図 2.5)。

図 2.6 $w = z^2$.

例 17

$$w = z^2$$

z 平面上で実軸にそった半直線 $y = 0, x > 0$ は $v = 0, u > 0$ に、 z 平面上で虚軸にそった半直線 $x = 0, y > 0$ は $u = 0, v < 0$ に写像される。また z 平面の第 1 象限にある円弧は w 平面上の上半平面にある円弧に写像される。 $f'(0) = 0$ であるから $z = 0$ を除く他のすべての点で等角である。

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy$$

であるから z 平面で実軸、虚軸に平行な直線はそれぞれ次のような放物線に写像される。

$$x = a \quad \Rightarrow \quad u = a^2 - \left(\frac{v}{2a}\right)^2$$

$$y = b \quad \Rightarrow \quad u = \left(\frac{v}{2b}\right)^2 - b^2$$

これら 2 つの放物線群はいたるところで互いに直交している (図 2.6)。

2.3.2 2次元の流れ I : 境界のあるラプラス方程式の解法への等角写像の応用

正則関数の実部、虚部は各々調和関数である。等角写像 $w = u(x, y) + iv(x, y)$ を用いて変数変換

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y) \quad (2.24)$$

を行なうと、 (x, y) 空間のラプラス演算子は

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) \quad (2.25)$$

と変換される。変換の比例係数は等角写像の拡大率

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = |w'(z)|^2$$

である。式(2.25)により、 (x, y) 空間のラプラス方程式は (u, v) 空間のラプラス方程式に変換される。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) f(x(u, v), y(u, v)) = 0. \quad (2.26)$$

2次元非圧縮性流体の渦無しの流れを考えよう。このとき複素ポテンシャル $f = \Phi + i\Psi$ が定義されることはすでに見たとおりである。ここで正則関数 $z = z(w)$ ($w = w(z)$) を用いて z 平面を w 平面に写像する。複素ポテンシャル $f(z(w)) = \Phi + i\Psi$ は w で微分可能であるからやはり w に関して正則関数となり Φ, Ψ はそれぞれ u, v ($w = u + iv$) の調和関数となる。したがって $w = u + iv$ 平面においても $\Phi(u, v), \Psi(u, v)$ をそれぞれ速度ポテンシャル、流れの関数とする渦無しの流れの速度場が存在する。これが上で述べたことである。

定常的な流れでは流れの境界(入れ物)に沿って流れがあるから、 z 平面での流れの境界は w 平面での流れの境界に対応し $\Psi = \text{一定}$ である流線のひとつがその境界にならなくてはならない。ある物体の周りの流れの模様を知るためには流れを一々解くまでもなく、別の物体の周りの流れを知っていれば、その物体の境界を一方の物体の境界に写像する等角写像を求めれば充分である。このため2次元非圧縮性流体の渦無しの流れ(あるいは電磁気学)では等角写像が重要になる。

半径 a である円(円柱)の周りの流れを考えて見ることにしよう。流れの中の閉曲線 C に沿って

$$I(C) = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \oint_C v_s ds \quad (2.27)$$

がゼロでない時これを循環と呼ぶ。例えば流れの中に物体がおかれた場合には物体の近くの流線が閉曲線を作り物体を回る流れができる。物体が円(柱)

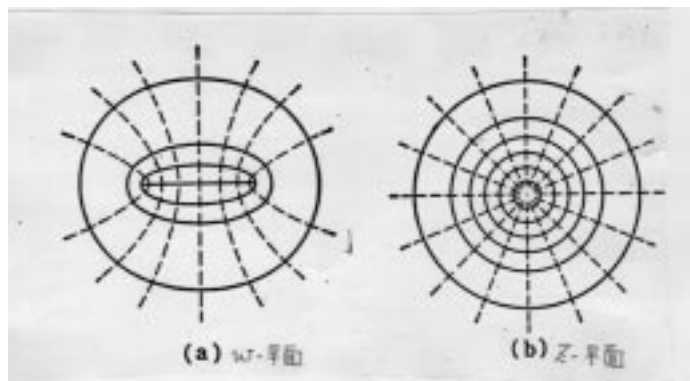


図 2.7 ジューコフスキー変換.

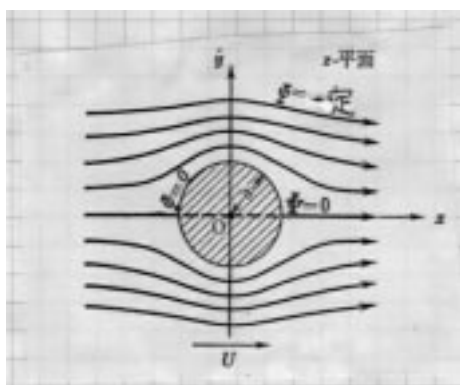


図 2.8 円柱の周りの非圧縮性流体の渦無しの流れ (循環のない場合) .

の場合に循環がなければ円の上で流れは対称であるが、循環がある場合には円の上で流れの速さが異なり圧力が働き揚力の原因となる。ここでは簡単のため循環はないとする。⁶

$$w = z + \frac{a^2}{z} \quad (2.28)$$

という変換を考えてみよう。これをジューコフスキー変換という。 $z = ae^{i\theta}$ とすると $w = 2a \cos \theta$ となるから、ジューコフスキー変換は z 平面の半径 a である円を w 平面の長さ $4a$ の平板に写像する (図 2.7)。 w 平面上で厚みのない

⁶円(柱)の回りの循環を表現するには対数関数が必要なのだが、まだ対数関数を定義していない。循環があって円から充分に離れると一様流になる場合、複素速度ポテンシャルは $f = U(z + a^2/z) + i(\Gamma/2\pi) \log z$ と書くことができる。これについては第3章 3.4 で考える。

平板に平行な流れの場合（平板がない場合と同様であるから）複素速度ポテンシャルは

$$f = Uw \quad (2.29)$$

である。実際、 $w = u + iv$ とすると $\Phi(u, v) = Uu$, $\Psi(u, v) = Uv$ であるから、 u 方向の流れの速度は U , v 方向の流れの速度は 0 であり、また流線は $v = \text{一定}$ という直線で表される。複素速度ポテンシャル f を z で表すと、

$$f = U\left(z + \frac{a^2}{z}\right) \quad (2.30)$$

となる。円から離れると($z \rightarrow \infty$)流れは $f \rightarrow Uz$ となり一様流になる。また円柱表面($z = ae^{i\theta}$)では

$$f = 2Ua \cos \theta \quad (2.31)$$

すなわち

$$\Phi = 2U \cos \theta, \quad \Psi = 0 \quad (2.32)$$

であり確かに流線は円(柱)に沿っている。円に沿った流れの速度は

$$v_\theta = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right) \Big|_{r=a} = -2U \sin \theta \quad (2.33)$$

となる。流れの様子を図2.8に示す。

平板に斜めに当たる流れに対してはジューコフスキー変換を逆に用いればよい。 w 平面で角度 α で円(柱)に当たる流れは

$$f = U\left(e^{-i\alpha}w + \frac{a^2 e^{i\alpha}}{w}\right) \quad (2.34)$$

である。したがって z 平面で長さ $2a$ の平板に角度 α をもって当る流れは上の式から

$$z = w + \frac{a^2}{w}$$

によって z 平面に移ればよい。

ジューコフスキー変換以外にも2次元流れに対しては等角写像がいろいろと応用される。複素速度ポテンシャルが

$$f(z) = Az^n \quad (2.35)$$

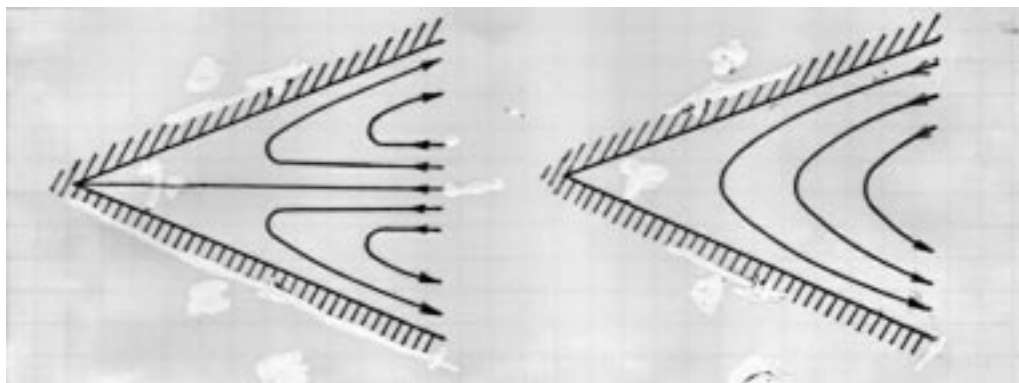


図 2.9 角 π/n をまわる渦無しの流れ.

となる場合を考えてみよう。 $z = re^{i\theta}$ として f を実部と虚部に分ければ

$$\Phi = Ar^n \cos n\theta, \quad \Psi = Ar^n \sin n\theta \quad (2.36)$$

であるから、 $\Psi = 0$ となる流線は $\theta = m\pi/n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)である。したがって上の速度ポテンシャルは角度 $m\pi/n$ の物体をまわる流れである(図 2.9)。

2.4 第2章問題

問1. 公式2.1.~4.を証明せよ。

問2. 次の $u(x, y)$ は調和関数であることを示し、 u を実部とする正則関数を求めよ。

$$(1) u = x^3 - 3xy^2 \quad (2) u = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \quad (3) u = e^x \cos y$$

問3. $w(z)$ が正則関数であるとき、 $z = re^{i\theta}$, $w(z) = Re^{i\Theta}$ と書くと、コーシー・リーマンの関係式は、

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{R}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial R}{\partial \theta} = -rR \frac{\partial \Theta}{\partial r}$$

と書けることを示せ。

問4. 写像 $w = 1/z$ により、 z 平面の直線群 $x = a$ (一定) および $y = b$ (一定) が w 平面のどのような曲線群に写像されるか。それらの曲線群で等角性を確かめよ。

問5. ジューコフスキー変換 $w = z + a^2/z$ により $\theta = \text{一定}$ ($z = re^{i\theta}$) の半直線はどのような曲線に写像されるか。

問6. ジューコフスキー変換 $\zeta = z + b^2/z$ により、 $r = \text{一定}$ ($z = re^{i\theta}$) は、 ζ 平面の楕円に写像されることを示せ。これを用いて断面が楕円形の柱の周りの2次元の流れを議論せよ。

問7. $w = z + e^z$ により z 平面の $-\pi \leq \text{Im}z \leq \pi$ が w 平面全体に写像されていることを示せ。特に $\text{Im}z = \pm\pi$ が $\text{Im}w = \pm\pi$, $\text{Re}w \leq -1$ に写像されることを示せ。これから平行平板蓄電器の端の電場を解析せよ。