目 次

第 1 章

複素数と複素数の級数

展望：

複素数の関数 (複素関数）の様々な性質を知るためにはまず複素数の性質を知らなくてはならない。本章の目的は、複素数および複素数の級数の性質を知ることである。無限級数はそれ自身意味のあるものであるばかりでなく、複素関数を議論するために欠くことができない。たとえば 3 角関数の初等的な定義は 2 次元の幾何の上で直角 3 角形の 2 辺の長さの比として与えられる。一方、一般の場合には複素数の無限級数によって 3 角関数を定義する。こうして便利な関数を手にすることができる。この例が示すように、よく用いられる初等複素関数が無限級数の形で定義されることが多いこと、複素関数の性質が無限級数の形で表現されると大変分かり易いこと、さらに級数の形が実用上最も便利であることなどが、無限級数を先ず学ぶ理由である。

本章では、複素数の定義と加減乗除を定義することから始める。これは多くの読者にとっては復習であるかもしれない。その後、複素数と 2 次元ベクトルとの関係、電気回路論における簡単な応用などにふれ複素数に慣れることにしばらくの時間を割こう。本章の後半で、複素数列の極限と級数の収束について学ぶ。極限や級数の収束は、実数の極限や級数論とほとんど本質的な差はないのですでに実数でこれらの面に習熟した読者にとっては繰り返しになるだろう。本章では実数列の級数で学んだことも既知とせず、初めから述べるように努める。

1.1　複素数

1.1.1　複素数の定義

2 乗して -1 となる '数' を虚数単位といいこれを i と書く。

$$\mathrm{i}^2 = -1 \tag{1.1}$$

i を用いると、実数を拡張し新しい種類の数を定義することができる。

定義 1 複素数: *2* つの実数 $x,\, y$ をとり

$$z = x + \mathrm{i}y \tag{1.2}$$

という組を考える。この z を複素数といい、x を複素数 z の実部あるいは実数部あるいは real part, y を複素数 z の虚部あるいは虚数部あるいは imaginary part という。虚部のみからなる複素数 $\mathrm{i}y$ を（純）虚数という。実部、虚部をそれぞれ $x = \mathrm{Re}z$、$y = \mathrm{Im}z$ と書く。[1]

今後特に断らない限り z, w あるいはこれらに下付きの添え字を付けたものを複素数とし、x, y, u, v あるいはこれらに下付きの添え字を付けたものを実数とする。したがって $z = x + \mathrm{i}y$ と書けば x は実部、y は虚部を表す。2 つの実数 x と yの組を複素数 zと定義したから、これを

$$z = (x, y) \tag{1.3}$$

と書くこともある。実部、虚部ともゼロである複素数を、ゼロである複素数という。

$$z = x + \mathrm{i}y = 0 \Leftrightarrow x = 0\ , \quad y = 0 \tag{1.4}$$

定義 2 等しい複素数：2 つの複素数 z_1 および z_2 の実部および虚部が各々等しいとき複素数 z_1 と z_2 は等しいという。逆に 2 つの複素数 z_1 と z_2 が等しいのは z_1 および z_2 の実部および虚部が各々等しいときに限られる。

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}z_1 = \mathrm{Re}z_2 \\ \mathrm{Im}z_1 = \mathrm{Im}z_2 \end{cases} \tag{1.5}$$

[1]虚数の発見はイタリアの G. カルダノ（Cardano） (1501-1576) による。カルダノはこの他にも 3 次方程式の解法の発見でも知られている。その後 L. オイラー（Euler）によって指数関数に関係づけられ、 C. F. ガウス（Gauss）によって大きく活躍の場を広げられた。

複素数 $z = x + \mathrm{i}y$ に対して虚部の符号を変えたもの $z' = x - \mathrm{i}y$ を zの**共役複素数**あるいは**複素共役**といい、 $\bar{z}$ とあらわす。[2]

$$\bar{z} = x - \mathrm{i}y \tag{1.6}$$

複素数 $z = x + \mathrm{i}y$ に対して $\sqrt{x^2+y^2}$ を z の絶対値といい $|z|$ と書く。

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} \tag{1.7}$$

複素数 $z = x + \mathrm{i}y$の絶対値がゼロであるのは zがゼロであるときに限る。

$$|z| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

zの絶対値と$\bar{z}$の絶対値は等しい。

$$|z| = |\bar{z}| \tag{1.9}$$

1.1.2 複素数の加減乗除

定義 3 複素数の加減算：２つの複素数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$の加減算は

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2) \qquad \text{（複号同順）} \tag{1.10}$$

と定義される。

定義 4 複素数の乗算：複素数の掛け算は

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + y_1 x_2) \tag{1.11}$$

と定義される。

これは $\mathrm{i}^2 = -1$ に注意すれば実数の掛け算と同じにおこなうことができる。

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 x_2 + \mathrm{i}^2 y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + y_1 x_2) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + y_1 x_2) \end{aligned} \tag{1.12}$$

[2] 物理学の分野では複素共役を z^* と書くことが多い。

定義 5 逆数：$z = x + \mathrm{i}y$ がゼロでないとき、$zz' = 1$ となる複素数 z' を考えることができる。これを zの逆数といい z^{-1}と書く。具体的に書くと

$$z^{-1} = \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \tag{1.13}$$

である。

$zz^{-1} = (x + \mathrm{i}y) \cdot (x - \mathrm{i}y)/(x^2 + y^2) = 1$ であることからこれは直ぐに理解できよう。

定義 6 複素数の除算：複素数 z_2がゼロでないとき割り算 z_1/z_2は次のように定義される。

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= z_1 {z_2}^{-1} = z_1 \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2} \\ &= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + \mathrm{i}(-x_1 y_2 + y_1 x_2)}{{x_2}^2 + {y_2}^2} \end{aligned} \tag{1.14}$$

定理 1 複素数の足し算（引き算）に対する結合法則、交換法則

$$\begin{aligned} &(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)\,（結合法則） \\ &z_1 + z_2 = z_2 + z_1\,（交換法則), \end{aligned} \tag{1.15}$$

および掛け算に対する結合法則、交換法則

$$\begin{aligned} &(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)\,（結合法則） \\ &z_1 z_2 = z_2 z_1\,（交換法則） \end{aligned} \tag{1.16}$$

が成り立つ。また分配法則

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3\,（分配法則） \tag{1.17}$$

が成り立つ。

これらは足し算および掛け算の定義から簡単に示すことができるので読者の演習に残しておこう。

絶対値は zとその複素共役 $\bar{z}$をもちいて

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} \tag{1.18}$$

と書くことができる。

また複素数の足し算およびかけ算の絶対値に対して

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$
$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \tag{1.19}$$

が成り立つ。

1.2　複素平面

1.2.1　複素平面と複素数

複素数とは 2 つの実数の組であるから、実数を表すのに数直線を用いたように、複素数を表すには 2 次元平面を用いる。

定義 7 複素平面の定義：2 次元平面の x 座標と y座標をそれぞれ複素数 zの実部 x と虚部 yに対応させて、2 次元平面上の点 (x, y) に複素数 $z = x + \mathrm{i}y$を対応させる。この 2 次元平面を複素平面またはガウス (Gauss) 平面という。また複素平面の x 軸を実軸、y軸を虚軸と呼ぶ。[3]

複素平面を用いると複素数相互の関係などが理解し易くなる。たとえば複素共役$\bar{z}$は zの虚部の符号を変えたものであるから、点 zと点$\bar{z}$は実軸に対して互いに対称な位置にある。2 つの複素数 z_1，z_2の和 $z_1 + z_2$は、原点から 2 点 z_1と z_2 向かう 2 次元ベクトルを考えたとき、その 2 つのベクトルの和が示す点が対応する複素数である (図 1.1)。[4]また複素数 zの絶対値 $|z|$ は複素平面上で、原点 $(0, 0)$ から点 $z = (x, y)$ までの距離である。

同じようにして 2 つの複素数 z_1，z_2の差の絶対値 $|z_1 - z_2|$ は 2 点 z_1と z_2 のあいだの距離である。このように考えると 2 つの複素数 z_1と z_2およびその和または差の絶対値の間に成り立つ関係

$$|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2| \tag{1.20}$$

も単に「３角形の２辺の長さの和は他の１辺の長さより長い」ということになる。

[3]複素数を平面上の 1 点に対応させることはガウスによって行なわれた。

[4]複素数が実 2 次元ベクトル空間の点、加減算が 2 次元ベクトル加減算に其々対応した。しかし掛け算はベクトルの内積（掛け算）には対応していない。

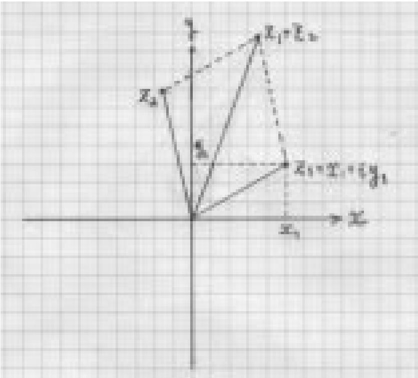

図 1.1　複素平面と複素数の加算 $z_1 + z_2$.

1.2.2　平面上の図形

平面上の図形の式も複素数を用いて書くことができる。

例 1 直線の式：2 次元平面上の直線は a, b, c を実数として $ax + by + c = 0$ と書ける。したがって複素平面上の点は、 $\alpha = a + \mathrm{i}b,\ z = x + \mathrm{i}y$ として

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + 2c = 0 \tag{1.21}$$

である。

例 2 円の方程式：点 (x_0, y_0) を中心として半径 a である円の方程式は $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - a^2 = 0$ である。これは複素数 $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ と $z = x + \mathrm{i}y$ を用いて

$$|z - z_0|^2 = (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = a^2 \tag{1.22}$$

あるいは c を $c = z_0\bar{z}_0 - a^2$ である実数として

$$z\bar{z} - \bar{z}_0 z - z_0\bar{z} + c = 0 \quad (c - |z_0|^2 < 0) \tag{1.23}$$

と書くことができる。

1.2.3　複素数の極表示

以下の式で定義されている複素数 $\mathrm{i}\theta$ の関数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ を導入しよう。

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\mathrm{i}\theta)^n \tag{1.24}$$

これを実部と虚部に整理し、それぞれに実数の 3 角関数に関するテーラー展開の公式を用いて書き換えると

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(i\theta)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \cos\theta + i\sin\theta \quad \text{(オイラーの公式)} \end{aligned} \tag{1.25}$$

を得る。無限級数 (1.24) の収束性などに関しては後で議論する。

2 次元平面上の点 (x, y) に対して極座標表示を用いて書いてみよう。

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta. \end{aligned} \tag{1.26}$$

このときオイラーの公式により複素数 zは

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} \tag{1.27}$$

となる。

定義 8 複素数の絶対値と偏角：複素数 $z = x + iy$ に対する r と θをもちいた表示

$$z = re^{i\theta} \tag{1.28}$$

を複素数の極形式という。ここで rは原点 $(0, 0)$ から点 (x, y) までの距離

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \tag{1.29}$$

を、θは x 軸（実軸）から時計と反対周りに計ったベクトル (x, y) の回転角

$$\begin{aligned} &\theta = \arctan\frac{y}{x} \\ &\quad 0 \le \theta \le \pi \pmod{2\pi}: \quad y \ge 0\ , \\ &\quad \pi < \theta < 2\pi \pmod{2\pi}: \quad y < 0 \end{aligned} \tag{1.30}$$

を表す。rは複素数 zの絶対値である。またθを複素数 zの偏角といい、$\arg z$と書く。

$$\theta = \arg z \tag{1.31}$$

しかし式（*1.30*）のように書いたのでは、偏角は 2πの整数倍だけの不定性があり一意的には定まらないので、θの値を不定性がないようにあらかじめ決めておく必要がある。$z = 0$ は、絶対値が *0* で偏角は不定である。

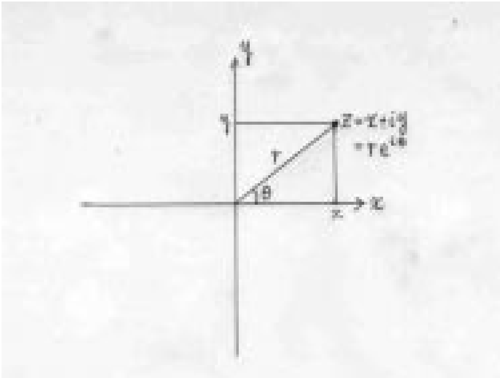

図 1.2 複素数の極表示.

偏角を特に$-\pi$からπ（または0から2π）に限って示すことがある。このときはargの頭文字を小文字のaではなく大文字Aを用いて$\mathrm{Arg}z$と表す。すなわち($z \neq 0$として)

$$
\begin{aligned}
\arg z &= \mathrm{Arg}z + 2n\pi \quad (n\text{ は適当な整数}) \\
-\pi &< \mathrm{Arg}z \leq \pi
\end{aligned} \tag{1.32}
$$

である。$\mathrm{Arg}z$を偏角の主値という。

極形式を用いると複素数の掛け算・割り算が幾何学的な意味を持っていることが理解できる。$z_1 = r_1 \exp(\mathrm{i}\theta_1)$, $z_2 = r_2 \exp(\mathrm{i}\theta_2)$と書いたとき、掛け算は

$$
z_1 z_2 = r_1 r_2 \exp\{\mathrm{i}(\theta_1 + \theta_2)\} \tag{1.33}
$$

である。[5]したがって$z_1 z_2$の絶対値はそれぞれの絶対値の積であり、偏角はそれぞれの偏角の和に等しい。

$$
\begin{aligned}
|z_1 z_2| &= |z_1||z_2| \\
\arg(z_1 z_2) &= \arg z_1 + \arg z_2 \ .
\end{aligned} \tag{1.34}
$$

ただし、偏角argについては注意を要する。簡単な例を考えよう。$z_1 = z_2 = -1 = e^{\mathrm{i}\pi}$の場合、$z_1 z_2 = 1$であるから$\arg(z_1 z_2) = 0$とするのが普通かも知れない。しかし$\arg z_1 + \arg z_2 = 2\pi$である。すなわち(1.34)の第2式

[5]$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$とすると$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)} = \cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2) = (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + \mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) = (\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$である。

は arg の示す無限個の値の組が等しいということで個々の関数値としては $2n\pi$, $(n = 0 \pm 1, \pm 2, \cdots)$ だけの差がある。偏角の主値については 2π を法として両者は等しい。

$$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) \;=\; \mathrm{Arg} z_1 + \mathrm{Arg} z_2 \pmod{2\pi} \tag{1.35}$$

例 3 複素数 zに虚数単位 $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$を掛けると複素平面上で点 (x, y) は原点を中心として$\pi/2$ だけ（時計と反対周りに）回転する。一方$-\mathrm{i} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}$を掛けると$-\pi/2$ だけ回転（時計周りに$\pi/2$ だけ回転）する。

1.2.4 複素数のべき乗とべき根

極表示を用いると複素数のべき乗も簡単である。n を正の整数（自然数）として

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \to z^n = r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \tag{1.36}$$

となる。

例 4 $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n \;=\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$と書いて左右両辺を 3 角関数で書くとド・モアブル (de Moivre) の定理

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta \tag{1.37}$$

が導かれる。

複素数のべき根（べき乗根）はどうなるだろうか。zの n 乗根 (n は自然数)wを考えよう。

$$w = z^{1/n}\;, \qquad w^n = z \tag{1.38}$$

$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $w = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$として第 2 式両辺を比べることにより

$$\rho^n = r\;, \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

を得る。ここで第 2 式の指数関数の肩に乗った偏角には $2m\pi$だけの不定性があることを考えると $\mathrm{i}n\phi = \mathrm{i}(\theta + 2m\pi)$ であるから

$$\rho = \sqrt[n]{r}\;, \qquad \phi = \frac{\theta}{n} + \frac{2m\pi}{n} \tag{1.39}$$

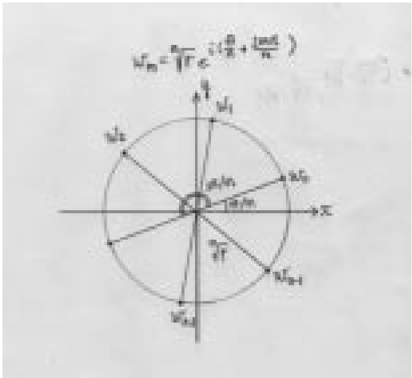

図 1.3 べき根の分布.

となる。ただし m は適当な整数（$m = 0, 1, 2, 3, \cdots, n-1$）である。$m$ が $m \geq n$ となると $m-n$ の場合と、複素 w-平面上の同じ点に戻ることに注意しよう。これから z の n 乗根 $w = z^{1/n}$ は、複素平面上で原点を中心とした半径 $\sqrt[n]{r}$ の円周上に等間隔に n 個並んでいることが分かる。したがって n 乗根 $w = z^{1/n}$ は複素 z 平面上の 1 点を複素 w 平面上の n 個の点に対応させる n 価の多価関数（n 価関数）である。

例 5 複素数 $\mathrm{i}^{1/2}$ を考える。

$$\mathrm{i}^{1/2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/2+2n\pi)/2}$$

であるから

$$\mathrm{i}^{1/2} = \cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4} \quad (n=0), \quad \cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4} \quad (n=1)$$

となり、

$$\mathrm{i}^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\ , \qquad -\frac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

と書き直される。

例 6 次のような計算をしたとしよう。

$$\frac{1}{\mathrm{i}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{-1} = \mathrm{i} \tag{1.40}$$

この結果は $\mathrm{i}^2 = 1$ となってしまう。これはもちろん誤りだが、答案などにたまに見かける、あまり笑ってばかりもいられない間違いである。

(1) $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$の意味を明確に理解しよう。本書では混乱を避けるため、以後は$\sqrt{-1}$の偏角は$\pi/2$、$\sqrt{1}$の偏角は 0 と決める。一方 $(-1)^{1/2}$と書いただけでは偏角が定まらない。

$$(-1)^{1/2}=\begin{cases}\mathrm{i} & (\text{偏角 }\pi/2)\\ -\mathrm{i} & (\text{偏角 }3\pi/2)\end{cases}$$

(2) $\sqrt{1}$と $(1)^{1/2}$をはっきり区別しなくてはいけない。$\sqrt{1}$ の偏角は上の約束により *0* である。一方

$$(1)^{1/2}=\begin{cases}1 & (\text{偏角 }0)\\ -1 & (\text{偏角 }\pi)\end{cases}$$

である。
(3) $\sqrt{\frac{1}{-1}}=\sqrt{-1}=\mathrm{i}$ は *(1)* に述べた意味で偏角 $\pi/2$ である。
(4) $\frac{1}{\mathrm{i}}=\frac{1}{\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$の偏角は、$0-\pi/2=-\pi/2$ である。絶対値 *1*、偏角$-\pi/2$の複素数は$-\mathrm{i}$ である。
べき根あるいは一般に多価関数の偏角は無造作に扱ってはならない。この例にあげた混乱は、偏角をきちんと決めないで$\sqrt{1}/\sqrt{-1}$と$\sqrt{1/(-1)}$ を等しいと考えたために生じた。

1.2.5　複素数を使いこなすこと:交流回路と複素インピーダンス

　複素数を用いるといろいろな場合に計算が簡便になりまた幾何学的な意味もはっきりすることが多い。力学における単振動、電磁気学の交流理論など多くの例で複素数を使うと便利なことが知られている。交流回路を考えてみよう。

　正弦的に振動する交流起電力 $E=E_0\cos\omega t$ を考える。回路には 1つのコイル L, 抵抗 R, コンデンサー C が直列に継っているとしよう。回路の方程式は電流を Iとすると

$$E=L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+RI+\frac{1}{C}\int^t I\mathrm{d}t \tag{1.41}$$

である。交流起電力を複素数で表せば

$$E=E_0\cos\omega t=\frac{1}{2}E_0(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}) \tag{1.42}$$

である。ここで

$$\begin{aligned} E &= E_+ + E_- \\ E_+ &= \frac{1}{2}E_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \\ E_- &= \frac{1}{2}E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \end{aligned} \tag{1.43}$$

とおいて、E_+, E_-に対応する電流を I_+, I_-とする。さらに

$$\begin{aligned} I_+ &= \frac{1}{2}{I_0}^+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \\ I_- &= \frac{1}{2}I_{0-}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \end{aligned} \tag{1.44}$$

とおいて添字+,−のついたものについてそれぞれ式（1.41）を解くと ${I_0}^\pm$として

$${I_0}^\pm = \frac{E_0}{R \pm \mathrm{i}\omega L \pm \frac{1}{\mathrm{i}\omega C}} = |I_0|\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\phi} \tag{1.45}$$

と求められる。ここで ${I_0}^\pm$は実数ではなく複素数でありその絶対値は等しい（$|{I_0}^+| = |{I_0}^-| = |I_0|$）ことに注意する。

$$Z = R + \mathrm{i}\omega L + \frac{1}{\mathrm{i}\omega C} \tag{1.46}$$

と定義すると $E_\pm$と $I_\pm$の関係は

$$E_+ = ZI_+ \ , \qquad E_- = \bar{Z}I_- \tag{1.47}$$

となり、形式的にオームの法則 $E = RI$と等しくなる。実際の電流は

$$I = I_+ + I_- = |I_0|\cos(\omega t + \phi) \tag{1.48}$$

と計算できる。Zを複素インピーダンスという。$|I_0|$ もϕも（1.45）から求められる。

　複素インピーダンスを用いると直流の場合の直列, 並列に関する結合定理やキルヒホッフの法則がそのままなり立つ。したがって複素数を用いることによって交流回路も直流回路と形式的に同じに取り扱うことができる。

1.3　複素数の数列と級数

1.3.1　数列と極限

定義 9 数列の極限：複素数の数列 $\{z_n\}$ $(n = 1, 2, 3 \cdots)$ を考える。これは複素平面上の点列である。この数列に対して

$$\lim_{n \to \infty} |z_n - c| = 0 \tag{1.49}$$

が成り立つとき「数列 $\{z_n\}$ は複素数 c に収束する」といいまた

$$\lim_{n \to \infty} z_n = c \tag{1.50}$$

とも書く。複素数 c を数列 $\{z_n\}$ の極限値という。収束しない数列を「発散する」という。

式（1.49）あるいは（1.50）は次のように書いてもよい。すなわち、任意の正数 ε に対して適当な自然数 N が存在し、$n > N$ である全ての z_n に対して

$$|z_n - c| < \varepsilon \tag{1.51}$$

である。

定義より

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \to \infty} |z_n - c| = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} \lim_{n \to \infty} \mathrm{Re}(z_n - c) = 0 \\ \lim_{n \to \infty} \mathrm{Im}(z_n - c) = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} \lim_{n \to \infty} \mathrm{Re} z_n = \mathrm{Re} c \\ \lim_{n \to \infty} \mathrm{Im} z_n = \mathrm{Im} c \end{cases}
\end{aligned}$$

である。つまり複素数列 $\{z_n\}$ の収束は 2 つの実数列 $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ の収束と同じである。したがって複素数列の収束判定の条件は実数列のそれと変わりがない。

定理 2 (数列に対するコーシーの収束判定定理)：数列 $\{z_n\}$ が与えられたとき、任意の正数εに対して自然数 $N(\varepsilon)$ を適当に選ぶと $N(\varepsilon)$ より大きい全ての自然数 n, m に対して

$$|z_n - z_m| < \varepsilon \quad (n, m > N(\varepsilon)) \tag{1.52}$$

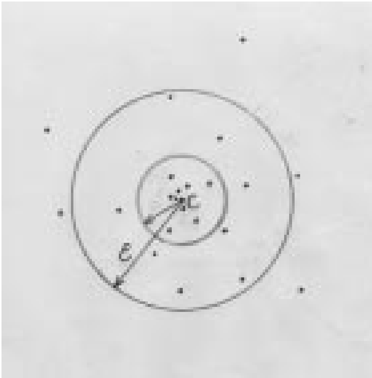

図 1.4　複素数列 $\{z_n\}$ の収束. 中心 c, 半径εの円内に無限個の点が存在し、円外の点は有限個.

が成り立つならば $\{z_n\}$ は収束する。逆もまた成り立つ。式 (1.52) のような数列をコーシー (Cauchy) の基本数列 とよぶ。

この定理の条件が必要条件であることすなわち収束するならば基本数列をなすことは容易に示すことができる。実際、$\{z_n\}$ が c に収束するならば、任意の正数εに対して適当な自然数 $N(\varepsilon)$ が存在して $n, m > N(\varepsilon)$ であるすべての n, m に対して

$$|z_n - c| < \frac{\varepsilon}{2}\ , \quad |z_m - c| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ。したがって

$$|z_n - z_m| = |(z_n - c) - (z_m - c)| \leq |z_n - c| + |z_m - c| < \varepsilon$$

となる。すなわち基本数列である。これで必要条件であることが示された。

充分条件の方は以下のとおりである。複素数列 $\{z_n\}$ が基本数列であればその実部がなす数列 $\{x_n\}$ も虚部がなす数列 $\{y_n\}$ もともに基本数列である。

$$|z_n - z_m| < \varepsilon \to |x_n - x_m| < \varepsilon\ , \quad |y_n - y_m| < \varepsilon$$

あとは $\{x_n\}, \{y_n\}$ がそれぞれ収束することをいえばよい。実数列が基本数列をなすことがその実数列が収束する必要充分条件（実数列に対するコーシーの収束判定定理）であること[6]を認めれば証明は完了する。

[6]実数列についての証明の核心を思い出すために $|x_n - x_m| < \varepsilon \Rightarrow \lim x_n = a$ を示してお

定理 3　2つの数列 $\{z_n\}$ と $\{w_n\}$ が収束するとき

$$\lim_{n\to\infty}(z_n \pm w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n \pm \lim_{n\to\infty} w_n \qquad \text{（複号同順）} \tag{1.53}$$

が成り立つ。

定理 4　2つの数列 $\{z_n\}$ と $\{w_n\}$ が収束するとき

$$\lim_{n\to\infty} z_n w_n = \lim_{n\to\infty} z_n \lim_{m\to\infty} w_m \tag{1.54}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} z_n}{\lim_{m\to\infty} w_m} \tag{1.55}$$

が成り立つ。

これらの証明は難しくないので読者の演習にまかそう。

1.3.2　級数と級数の収束

定義 10 級数と級数の収束：

$$\sum_{m=1}^{\infty} z_m = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots\cdots \tag{1.56}$$

こう。まず x_n が有界であることを示す。$n > N(\varepsilon)$ であるとき任意の整数εに対して

$$|x_n - x_N| < \varepsilon, \quad x_N - \varepsilon < x_n < x_N + \varepsilon$$

だから $n > N$ である x_n は有界である。したがって有限個の x_m $(m \leq N)$ を付け加えた $\{x_n\}$ は有界である。

いま任意の n に関して $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots$ の上限下限を其々u_n, l_nとおくと、

$$l_1 \leq l_2 \leq \cdots \leq l_n \leq \cdots\cdots \leq u_n \leq \cdots \leq u_2 \leq u_1$$

である。$\{l_n\}, \{u_n\}$ はそれぞれ有界単調数列ゆえ収束する。さらに

$$u_n - l_n \leq \varepsilon$$

であり n を充分大きくすることによってεは任意に小さくできる。以上によって l_n，u_nは収束し、$l_n \to a$，$u_n \to a$ である a が存在する。これで

$$\lim_{m\to\infty} x_n = a$$

が示された。

を（複素）級数という。複素級数の部分和

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} z_m \tag{1.57}$$

が S に収束するとき「級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は S に収束する」という。また部分和の列 $\{S_n\}$ が発散するとき「級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は発散する」という。

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ が収束するということと 2 つの実級数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ が収束するということは同等である。

定理 5 部分和に対するコーシーの収束判定定理：級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ が収束するならば、任意の正数 ε に対して適当な $N(\varepsilon)$ を選ぶと

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots\cdots + z_{n+p}| < \varepsilon \quad (n > N(\varepsilon)\ ,\ p > 0) \tag{1.58}$$

を満たす。逆もまた成り立つ。

$z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots\cdots + z_{n+p} = S_{n+p} - S_n$ であるから、この定理は部分和の列 $\{S_n\}$ に関する収束判定定理の言い直しである。証明はきわめて容易であろう。

定理 6 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ が収束するなら $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ である。

収束判定定理で $p = 1$ の場合である。

定義 11 絶対収束：級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ の各項の絶対値を各項とする級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ が収束するとき、「複素級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は絶対収束する」といい、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ を絶対収束級数という。

定理 7 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ が絶対収束するなら級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ も収束する。

一般の複素数の組 $z_{n+1}, z_{n+2}, \cdots, z_{n+p}$ に対して

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots\cdots + z_{n+p}| \le |z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \cdots\cdots + |z_{n+p}|$$

である。級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ が絶対収束なら

$$|z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \cdots\cdots + |z_{n+p}| < \varepsilon$$

でありしたがって

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots\cdots + z_{n+p}| \leq \varepsilon$$

となる。（証明終わり）

　以下に絶対収束級数に関するいくつかの定理を述べる。いずれも難しくないので証明は読者の演習に委ねる。

定理 8 絶対収束級数は項の順番を入れ替えても絶対収束級数であり、その値は元の級数の和の値と同じである。

定理 9 絶対収束級数の続いている項をいくつかづつまとめて *1* 項として作った級数も絶対収束し、その値は元の級数の和の値と等しい。

定理 10 級数$\sum z_n$および$\sum w_n$が絶対収束級数ならば$\sum(z_n + w_n)$ も絶対収束で$\sum(z_n + w_n) = \sum z_n + \sum w_n$である。

定理 11 $|z_n| \leq M_n$および$\sum M_n$が収束するような非負な実数列 $\{M_n\}$ が存在すれば$\sum z_n$は絶対収束する。

例 7 $|z| < 1$ であれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

は絶対収束する。$M_n = x^n$, $|z| = x < 1$ である実数列（等比数列 x^n）を考えればよい。

例 8

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

は絶対収束する。$M_n = |z|^n/n!$, $|z| = x$ である実数列 $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$は絶対収束するからである。これを e^z, $\exp z$ と書く。

定理 12 級数$\sum z_n$および$\sum w_n$が絶対収束級数ならば其々の項の積のすべての組み合わせ $z_n w_m$をとりそれらを任意の順序で並べた級数$\sum z_n w_m$を考えたとき、この級数も絶対収束しその和は其々の級数和の積に等しい。

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} z_n w_m = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \sum_{m=1}^{\infty} w_m \tag{1.59}$$

最後の定理 12の証明を述べよう。級数$\sum z_n w_m$の部分和に含まれる添え字 n, m の最大値を K, L とする。するとその部分和について

$$\sum |z_n w_m| \leq \sum_{n=1}^{K} |z_n| \sum_{m=1}^{L} |w_m|$$

ところで$\sum |z_n|$, $\sum |w_m|$ は絶対収束するから上の右辺も有限である。したがって部分和$\sum |z_n w_m|$ は有界で、無限級数の和$\sum z_n z_m$は絶対収束する。これにより項の並べ方の順序にはよらない一定の値をとる。

例 9

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{1.60}$$

と定義し、

$$\frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = \sum_{\ell+m=n} \frac{z_1^l z_2^m}{\ell! m!}$$

に注意すれば定理 *12*から直ぐに

$$\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1} \mathrm{e}^{z_2} \tag{1.61}$$

が導かれる。

1.4　第 1 章問題

問 1. 次の複素数の計算をせよ。
(1) $(2-\mathrm{i})^2$　(2) $(2-\mathrm{i})(1+\mathrm{i}/2)$　(3) $(2-\mathrm{i})/(1-2\mathrm{i})$

問 2. 複素数 z_1, z_2について次の式を示せ。
(1)$|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$　(2)$|z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$

問 3. 複素平面上の 4 点$\alpha, \beta, \gamma, \delta$が同一円周上にあるための必要充分条件は

$$\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}\Big/\frac{\alpha-\delta}{\beta-\delta} = \text{実数}$$

であることを示せ。（直線も円周のうちに含むとする。）

問 4. 次の複素数を極表示で表せ。
(1) $(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^{4/3}$　(2) $(1+\mathrm{i})^{1/3}$

問 5. ２つの数列 z_n,w_nが収束するとき次の関係式を示せ。（定理３、定理４）

(1) $\lim_{n\to\infty}(z_n \pm w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n \pm \lim_{n\to\infty} w_n$
(2) $\lim_{n\to\infty} z_n w_n = \lim z_n \lim w_n$
(3) $\lim_{n\to\infty} z_n/w_n = \lim z_n/\lim w_n$, 但し $\lim_{n\to\infty} w_n \neq 0$

問 6. 絶対収束級数は項の順番を入れ換えても絶対収束であり、その値は元の級数の和に等しいことを示せ。（定理８）

問 7. 絶対収束級数の続いている項をいくつかづつまとめて１項として作った級数も絶対収束し、その値は元の級数の値に等しいことを示せ。（定理９）

問 8. $\sum_n z_n$および$\sum_n w_n$が絶対収束級数なら、$\sum_n(z_n+w_n)$ も絶対収束級数であり、$\sum_n(z_n+w_n) = \sum_n z_n + \sum_n w_n$であることを示せ。（定理１０）

問 9. $|z_n| \leq M_n$および$\sum_n M_n$が収束するような非負な実数列 $\{M_n\}$ が存在すれば、$\sum_n z_n$も絶対収束することを示せ。（定理１１）

問 10.

$$(1+\frac{z}{n})^n = 1+z+\sum_{k=2}^{n} 1(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})\frac{z^k}{k!}$$

と書けることを示し、これから

$$\mathrm{e}^z = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n$$

を導け。