線形微分方程式の級数解法

1　線形微分方程式

2 階線形微分方程式

$$L[w] \equiv \frac{d^2}{dz^2}w(z) + P(z)\frac{d}{dz}w(z) + Q(z)w(z) = 0 \tag{1}$$

- 通常点

  1. [定義] 通常点 z_0 ：$P(z)$, $Q(z)$ が $z = z_0$の周りで正則な点 z_0.
  2. [解] 通常点 z_0 の周りでの解はべき級数展開できて

$$w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \tag{2}$$

- 確定特異点

  1. [定義] $p(z) = (z - z_0)P(z)$, $q(z) = (z - z_0)^2 Q(z)$ が $z = z_0$の周りで正則である点 z_0.
  2. [解] 確定特異点 $z = z_0$ の周りの解は

$$w_1(z) = (z - z_0)^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} (z - z_0)^k \tag{3}$$

$$w_2(z) = (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)} (z - z_0)^k \tag{4}$$

もしくは

$$w_1(z) = (z - z_0)^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} (z - z_0)^k \tag{5}$$

$$w_2(z) = w_1(z) \log(z - z_0) + (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)} (z - z_0)^k \tag{6}$$

という形で求められる.

2　正則点 $z = 0$ の周りの解

$P(z)$,　$Q(z)$ が

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \tag{7}$$

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k \tag{8}$$

とべき級数で展開される場合には解は

$$w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \tag{9}$$

と求められる. 上式 (9) を元の微分方程式 (1) に代入し, 各項比較により係数 c_kを決定する.

3 確定特異点 $z=0$ の周りの解

$P(z)$, $Q(z)$ が

$$P(z)=\frac{1}{z}p(z)=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}p_k z^k \tag{10}$$

$$Q(z)=\frac{1}{z^2}q(z)=\frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}q_k z^k \tag{11}$$

とべき級数で展開される場合には解は,

$$L[w]=z^2w''+zp(z)w'+q(z)w=0 \tag{12}$$

の解を

$$w(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^{\rho+k} \qquad (c_0\neq 0) \tag{13}$$

と仮定し (12) に代入する. 実際, (13) を (12) に代入して

$$L[w]=z^{\rho}\sum_{l=0}^{\infty}\Big\{\sum_{n=0}^{l}c_{l-n}f_n(\rho+l-n)\Big\}z^l=0 \tag{14}$$

を得る. したがって c_l を決める方程式

$$\sum_{n=0}^{l}c_{l-n}f_n(\rho+l-n)=0 \tag{15}$$

が得られ, これからすぐに c_lが求められる. ただし f_nは

$$f_0(\rho+k)=(\rho+k)(\rho+k-1)+p_0(\rho+k)+q_0 \tag{16}$$

$$f_n(\rho+k)=(\rho+k)p_n+q_n \qquad (n\geq 1) \tag{17}$$

である.

(16) はρとして 2 つの根 $\rho_1\geq\rho_2$ を持つ. このとき解は以下のような構造をとる.

1. $\rho_1-\rho_2\neq$ 正整数の場合.

$$w_j(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k^{(j)}z^{\rho_j+k} \qquad (c_0^{(j)}\neq 0 \quad , j=1,2) \tag{18}$$

2. $\rho_1-\rho_2=m$ (正整数または 0) の場合. $\rho=\rho_1$に対する解は

$$w_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k^{(1)}z^{\rho_1+k} \qquad (c_0^{(1)}\neq 0) \tag{19}$$

となる. 第 2 の$\rho=\rho_2$に対する解は (19) のような形には求まらない.

第 2 の解を求めるには「Frobenius（フロベニウス）の方法」として知られた一般的な方法がある. 参考文献として以下のものをあげるに止める.

- 「常微分方程式」（東大出版会）田辺行人, 藤原毅夫著

- 「特殊関数」（岩波全書）犬井鉄郎著

Frobenius の方法は一般に確定特異点の周りの級数解を求める上で大変重要である. このように解かれる微分方程式としてよく知られたものには, 以下のようなものが挙げられる.

- ルジャンドル (陪) 微分方程式 (軌道角運動量の固有関数)

- 球ベッセル微分方程式 (3 次元井戸型ポテンシャルの動径波動関数)

- ラゲールの微分方程式 (水素様原子 (クーロンポテンシャル場) におけるの動径波動関数)

- エルミート微分方程式 (1 次元調和振動子)

ルジャンドル (陪) 関数, ラゲール多項式, エルミート多項式などが現れる多くの場合には第 1 の解が (境界条件を満足する) 必要な解になっているので, 第 1 の解のみに関心がある.

ベッセル関数については少し事情が異なる. 球ベッセル関数が現れる井戸型ポテンシャルでは, 第 1 の解, 第 2 の解がそれぞれ $r=0$, $r=\infty$ での境界条件を満足する解になっている. したがって両方の解を知らなくてはならない.

4 フロベニウスの方法

c_l を決める方程式 (15)

$$\sum_{n=0}^{l} c_{l-n} f_n(\rho+l-n) = 0$$

において, $\rho_1 - \rho_2 = m$ (正整数または 0) の場合を検討しよう. (15) で $c_0 \neq 0$ であるから, まずρが

$$c_0 f_0(\rho) = 0 \Rightarrow f_0(\rho) = \rho(\rho-1) + p_0\rho + q_0 = 0 \Rightarrow \rho = \rho_1,\ \rho_2 \tag{20}$$

と求まる. 以下順に

$$c_1 f_0(\rho+1) + c_0 f_1(\rho) = 0 \Rightarrow c_1 \text{ が決まる.} \tag{21}$$

$$c_2 f_0(\rho+2) + c_1 f_1(\rho+1) + c_0 f_0(\rho) = 0 \Rightarrow c_2 \text{ が決まる.} \tag{22}$$

$$\cdots$$

$$c_l f_0(\rho+l) + c_{l-1} f_1(\rho+l-1) + \cdots + c_0 f_l(\rho) = 0 \Rightarrow c_l \text{ が決まる.} \tag{23}$$

という具合に ($f_0(\rho+k) \neq 0$ ($k \leq l$) であれば), c_k ($k = 1, 2, \cdots l$) が決められる.

$\rho_1 - \rho_2 = m$(0 または正整数) の場合には, $\rho = \rho_1$ に対する $c_k^{(1)}$を決めるには, 上の方法によればよい. しかし, 次に$\rho = \rho_2$ に対する $c_k^{(2)}$を決めるとき, (20) $\sim$ (23) に対応する式は

$$c_0^{(2)} f_0(\rho_2) = 0 \Rightarrow c_0^{(2)} \neq 0 \tag{24}$$

$$c_1^{(2)} f_0(\rho_2+1) + c_0^{(2)} f_1(\rho_2) = 0 \Rightarrow c_1^{(2)} \text{ が決まる.} \tag{25}$$

$$c_2^{(2)} f_0(\rho_2+2) + c_1^{(2)} f_1(\rho_2+1) + c_0^{(2)} f_0(\rho_2) = 0 \Rightarrow c_2^{(2)} \text{ が決まる.} \tag{26}$$

$$\cdots$$

$$c_{m-1}^{(2)} f_0(\rho_2+m-1) + c_{m-2}^{(2)} f_1(\rho_2+m-2) + \cdots + c_0^{(2)} f_{m-1}(\rho_2) = 0 \Rightarrow c_{m-1}^{(2)} \text{ が決まる.} \tag{27}$$

とここまでは第 1 の場合を真似ることができる. しかし次に現れる

$$c_m^{(2)} f_0(\rho_2+m) + c_{m-1}^{(2)} f_1(\rho_2+m-1) + \cdots + c_0^{(2)} f_m(\rho_2) = 0 \tag{28}$$

が一般に $f_0(\rho_2+m) = f_0(\rho_1) = 0$ と両立するかどうかは保証されない.

一般に以下のことがいえる. (この辺の事情は一般的に考えると理解し難しい. むしろ以下に示す例で見たほうがわかり易い.)

1. $m > 0$ の場合には (28) が $f_0(\rho_2+m) = f_0(\rho_1) = 0$ と両立することがある. このときは第 2 の解は有限個のべき項からなる式となる.

2. $m > 0$ の場合で第 1 の場合の除く大半の場合には,

$$c_0^{(2)}(\rho) = (\rho - \rho_2) \tag{29}$$

と選ぶと

$$L[w(z,\rho)] = (\rho-\rho_2) f_0(\rho) z^\rho = (\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)^2 z^\rho \tag{30}$$

$$L\left[\left\{\frac{\partial}{\partial\rho} w(z,\rho)\right\}_{\rho=\rho_2}\right] = \left[\frac{\partial}{\partial\rho} L[w(z,\rho)]\right]_{\rho=\rho_2} = 0 \tag{31}$$

となる. したがって

$$\left.\frac{\partial}{\partial\rho} w(z,\rho)\right|_{\rho=\rho_2} \tag{32}$$

は第 2 の独立な解になる.

3. $m = 0$ $(\rho_1 = \rho_2 = \rho_0)$ の場合には,

$$c_0^{(2)}(\rho) = c_0^{(1)} \tag{33}$$

と選べば

$$L\left[\left\{\frac{\partial}{\partial\rho} w(z,\rho)\right\}_{\rho=\rho_0}\right] = \left[\frac{\partial}{\partial\rho} (\rho-\rho_0)^2 c_0^{(1)} z^\rho\right]_{\rho=\rho_2} = 0 \tag{34}$$

となる. したがって

$$\left.\frac{\partial}{\partial\rho} w(z,\rho)\right|_{\rho=\rho_0} \tag{35}$$

は第 2 の独立な解になる.

5　例題 1

$$(z^2+3z^3)w''+5zw'+3(1-2z)w=0 \tag{36}$$

の確定特異点 $z=0$ の周りの級数解を求めよう.

解の形を

$$w(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^{\rho+n} \tag{37}$$

と仮定する.

$$L[w(z)]=(\rho+3)(\rho+1)c_0 z^{\rho}+\sum_{n=1}^{\infty}\{3(\rho+n)(\rho+n-3)c_{n-1}+(\rho+n+3)(\rho+n+1)c_n\}z^{\rho+n} \tag{38}$$

z^{ρ} の係数から

$$\rho_1=-1\ ,\quad \rho_2=-3\ . \tag{39}$$

- $[\rho=\rho_1=-1$：第 1 の解]　$c_n=-3\frac{(n-1)(n-4)}{n(n+2)}c_{n-1}$　ゆえに

$$c_1=0,\quad \text{and}\quad c_2=c_3\cdots=0$$

ゆえに

$$w_1=z^{-1}$$

- $[\rho=\rho_2=-3$：第 2 の解]

$$c_0=(\rho-\rho_2)=(\rho+3)$$

とおく.

$$\begin{aligned} c_n(\rho) &= -3\frac{(\rho+n)(\rho+n-3)}{(\rho+n+3)(\rho+n+1)}c_{n-1}(\rho) \\ &= (-3)^n\frac{\rho+1}{\rho+n+1}\cdot\frac{(\rho+3)\cdots(\rho-2)}{(\rho+n+3)\cdots(\rho+n-2)}\times(\rho+3) \end{aligned} \tag{40}$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}c_n(\rho)=c_n(\rho)[\frac{1}{\rho+1}+\frac{1}{\rho+3}-\frac{1}{\rho+n+1}+\sum_{l=-2}^{3}(\frac{1}{\rho+l}-\frac{1}{\rho+n+l})] \tag{41}$$

$\rho=\rho_2$ を代入すると $\frac{\partial}{\partial\rho}c_n(\rho)$ は $0\leq n\leq 5$ のみ 0 でないことが分かる. また

$$c_n(\rho)\Big|_{\rho=\rho_2}$$

は $c_2=-180$ のみ 0 でない.

$$c_0=(\rho+3),$$

$$
\begin{aligned}
c_1 &= 3 \cdot 10 \cdot (\rho + 3), \\
c_2 &= -180, \\
c_3 &= -3 \cdot 180 \cdot (\rho + 3), \\
c_4 &= -405 \cdot (\rho + 3), \\
c_5 &= -162 \cdot (\rho + 3), \quad \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$
z_2 = -180 \cdot \ln z \cdot \frac{1}{z} + z^{-3}(1 + 30z + 441z^2 - 540z^3 - 405z^4 - 162z^5) \tag{42}
$$